

Forslag til løsning

Oppgave 1

a) Arbeidet langs isotermen er gitt ved

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT_1}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} \left(RT_1 \ln(V-b) + \frac{a}{V} \right) = RT_1 \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} + \frac{a}{V_2} - \frac{a}{V_1}$$

$$= \underline{\underline{RT_1 \ln(7/4) - \frac{3}{40} \frac{a}{b}}}$$

Tilført varme er bestemt av energibevarelse

$$Q = \Delta U + W = U_2 - U_1 + W = -\frac{a}{V_2} + \frac{a}{V_1} + W$$

$$= \underline{\underline{RT_1 \ln(7/4)}}$$

b) Entalpien er gitt ved

$$H = U + pV = C_v T - \frac{a}{V} + \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) V$$

$$= \underline{\underline{(C_v + R \frac{V}{V-b}) T - \frac{2a}{V}}}$$

Med bevaring av entalpi finner en så med $V_5 = \infty$, $V_0 = 6b$ og $C_v = \frac{5}{2}R$

$$H_5 = H_0$$

①

$$(C_v + R) T_5 = (C_v + R \frac{6}{5}) T_0 - \frac{2a}{6b}$$

$$\frac{7}{2} R T_5 = \frac{37}{10} R T_0 - \frac{1}{3} \frac{a}{b}$$

$$T_5 = \underline{\underline{\frac{37}{35} T_0 - \frac{2}{21} \frac{a}{Rb}}}$$

c) Virkningsgraden til varmepumpe

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{12,0 \text{ MJ}}{4,8 \text{ MJ}} = \underline{\underline{2,5}}$$

Ablevert varme fra det kalde reservoaret

$$Q_1 = 12,0 \text{ MJ} - 4,8 \text{ MJ} = \underline{\underline{7,2 \text{ MJ}}}$$

Total endring av entropi er gitt ved

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = \left(\frac{12,0}{293} - \frac{7,2}{263} \right) \frac{\text{MJ}}{\text{K}} = \underline{\underline{13,6 \text{ kJ/K}}}$$

Det teoretisk minste arbeidet er bestemt av at total entropiendring er lik 0. Da må en ha

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

$$Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q_2 = \frac{263}{293} \cdot 12,0 \text{ MJ} = \underline{\underline{10,77 \text{ MJ}}}$$

Minste nyttig arbeid tilført blir følgende

$$W_{\min} = Q_2 - Q_1 = (12,0 - 10,77) \text{ MJ} = \underline{\underline{1,23 \text{ MJ}}}$$

[Bruk av Carnot virkningsgrad gir det samme, $Q_1 = (T_1/T_2) Q_2$.]

Oppgave 2.

a) ΔS er endringen i entropi og ΔV er endringen av volum ved faseovergangen.

Ved faseovergang er $T = \text{konst.}$ slik at $L = T\Delta S$ eller

$$\Delta S = \frac{L}{T} = aT - b$$

Clapeyrons likning blir dermed

$$\frac{dp}{dT} = \frac{aT - b}{c}$$

Ved integrering av denne likningen med gitt minimumsverdi p_0 finner en

$$p = \frac{a}{2c} \left(T - \frac{b}{a}\right)^2 + p_0$$

b) Fra uttrykket for fryssepunkt nedsettelsen finner en først

$$X_s = -\Delta T \frac{L_s}{RT_0^2} = -0,14 \text{ K} \cdot \frac{333 \text{ J/g} \cdot 18 \text{ g/mol}}{8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \cdot (273 \text{ K})^2} \\ = \underline{1,354 \cdot 10^{-3}}$$

Antall mol vann

$$n_v = \frac{3,5 \text{ kg}}{18 \text{ g/mol}} = \underline{194 \text{ mol}}$$

Med molbrøk

$$X_s = \frac{n_r}{n_v + n_r} \approx \frac{n_r}{n_v}$$

blir antall mol rørsukker

$$n_r = X_s n_v = 1,354 \cdot 10^{-3} \cdot 194 \text{ mol} = \underline{0,263 \text{ mol}}$$

Mengden rørsukker oppløst blir dermed

$$m = 342 \text{ g/mol} \cdot 0,263 \text{ mol} = \underline{90 \text{ g}}$$

c) Ved ideell blanding er indre energi og volum uendret ved blandingen mens entropien endrer seg. Endringen i entropi er som blandingsentropien for ideelle gasser.

Avviket i kjemisk potensial er gitt ved

$$\Delta \mu_1 = \frac{\partial \Delta G}{\partial N_1} = a \frac{\partial}{\partial N_1} (N_1 X_1 X_2) = a \frac{\partial}{\partial N_1} \left(\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \right) \\ = a \left[\frac{N_2}{N_1 + N_2} - \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2} \right] = a (X_2 - X_1 X_2) \\ = \underline{a X_2^2} = \underline{a (1 - X_1)^2}$$

da $X_1 + X_2 = 1$.

Silsvarende finner en

$$\Delta \mu_2 = \underline{a X_1^2}$$

③

④

Oppgave 3.

a) Netto partikkelstrøm tetthet finner en ved å integrere over alle retningene

$$j_z = \int d j_z = \int v \cos \theta n F(v) d\vec{v}$$

$$= \int (n(z) - \lambda \cos \theta \frac{\partial n}{\partial z}) v \cos \theta F(v) v^2 dv d\Omega$$

Da $\int \cos \theta d\Omega = 0$ vil ikke $n(z)$ -leddet bidra.

For det andre leddet har en

$$\int \cos^2 \theta d\Omega = \frac{4\pi}{3}$$

Med $4\pi v^2 dv = d\vec{v}$ har en videre

$$\langle v \rangle = \int v F(v) d\vec{v}$$

slik at alt i alt

$$j_z = -\lambda \frac{1}{3} \langle v \rangle \frac{\partial n}{\partial z}$$

Ved å sammenlikne med $\vec{j} = -D \nabla n$ finner en at diffusjonskonstanten blir

$$D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$$

b) Grensebetingelsen $T = T_1$ ved $R = R_1$ gir

$$T_1 = A (\ln R_1 - \ln R_2) + T_2$$

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln R_2 - \ln R_1} = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

Varmestromtettheten i radiell retning er gitt ved

⑤

$$j_r = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa \frac{A}{r}$$

En rør lengde L med radius r vil ha areal

$$S = 2\pi r L$$

slik at total varmestrom blir

$$\dot{Q} = j \cdot S = -\kappa \frac{A}{r} 2\pi r L = -2\pi L \kappa A = \underline{\underline{C_1 (T_1 - T_2)}}$$

der

$$C_1 = \underline{\underline{2\pi L \frac{\kappa}{\ln(R_2/R_1)}}}$$

c) Ved grenseflata mellom de 2 lagene vil det være en temperatur T_0 . Varmestrommen gjennom de 2 lagene vil være den samme, og er gitt ved

$$\dot{Q}_n = C_1 (T_1 - T_0) = C_2 (T_0 - T_2)$$

Ved å betrakte temperaturforskjellene finner en

$$T_1 - T_0 = \dot{Q}_n / C_1$$

$$T_0 - T_2 = \dot{Q}_n / C_2$$

$$T_1 - T_2 = (C_1^{-1} + C_2^{-1}) \dot{Q}_n$$

$$\dot{Q}_n = \frac{T_1 - T_2}{C_1^{-1} + C_2^{-1}} = \frac{C_1 C_2 (T_1 - T_2)}{C_2 + C_1}$$

Med dette blir forholdet

$$F = \frac{\dot{Q}_n}{\dot{Q}} = \underline{\underline{\frac{C_2}{C_2 + C_1}}}$$

⑥