

Regneøving 8.

(Veiledning: Mandag 5. mars kl. 8.15 - 14.00 og kl. 10.15 - 12.00.)

Oppgave 1

a) Et kvantisert magnetisk moment (f.eks. et elektronspinn eller kjernespin i atomkjerne) i et ytre magnetfelt \mathcal{H} har energien $-sh$ der $s = \pm 1$ og $h = A\mathcal{H}$ der A er en konstant. I termisk likevekt er sannsynligheten for å være i en av de to tilstandene $s = \pm 1$ gitt ved

$$p(s) = C e^{\beta sh}$$

der C er en normeringskonstant og $\exp(\beta sh) = \exp(-\beta(-sh))$ er Boltzmannfaktoren. Beregn C og bestem med det partisjonsfunksjonen $Z = C^{-1}$.

Midlere magnetiske moment er proporsjonalt med middelverdien av s gitt ved

$$m = \langle s \rangle = \sum_{s=\pm 1} s p(s).$$

Beregn m . (Svar: $m = \tanh \beta h$. For små h er $m = \beta h \propto \mathcal{H}/T$, dvs. Curies lov.)

b) Med kjent Z kan også entropien S bestemmes. For N uavhengige (ikke-vekselvirkende) spinn er Gibbs fri energi G gitt ved $-\beta G = N \ln Z$ og enthalpien $H = U - N\langle s \rangle h = -Nmh$. (For fri ikke-vekselvirkende spinn er indre energi $U = 0$ og Nmh tilsvarende $\mu_0 \mathcal{M} \mathcal{H}$, dvs. $Nm = A^{-1} \mu_0 \mathcal{M}$ og $h = A\mathcal{H}$ der \mathcal{M} er det magnetiske moment og A er en konstant.)

Entropien følger da av den termodynamiske relasjonen $G = H - TS$, dvs. $S = (H - G)/T = k\beta(H - G) = Nk(\beta mh - \ln Z)$ (eller fra $dG = -S dT - m dh$ som $S = -(\partial G / \partial T)_h$). En kan så eliminere βh ved å invertere $m = \tanh(\beta h)$. Dette gir $\beta h = \frac{1}{2} \ln [(1+m)/(1-m)]$ slik at entropien blir

$$S = Nk \left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m) \right]$$

Som et alternativ til en slik beregning kan entropien bestemmes direkte fra Boltzmanns resultat $S = k \ln W$. Anta at et antall N_+ og N_- spinn peker henholdsvis med og mot magnetfeltet. Med $s = \pm 1$ er da magnetiseringen såvel som energien (enthalpien) $H = -Nmh$ proporsjonal med $Nm = N_+ - N_-$ (der $N = N_+ + N_-$). Beregn antall mikrotilstander W forenlig både med den gitte magnetiseringen og energien (dvs. med $Nm = N_+ - N_-$ fast) og vis med det at entropien blir som angitt ovenfor.

Oppgitt: $\ln N! = N \ln N - N$, $N \rightarrow \infty$.

c) Et slikt spinnssystem kan benyttes til å oppnå svært lave temperaturer ved å bruke adiabatisk demagnetisering. Et kraftig magnetfelt h_1 settes på isotermt ved lav temperatur T_1 . Deretter fjernes termisk kopling og magnetfeltet slås av adiabatisk. På grunn av litt kopling mellom spinnene ender en opp med et effektivt magnetfelt $h_2 > 0$. Hva blir resulterende temperatur T_2 når andre bidrag til entropien negliseres. [For lave T er spesifikke varme fra kvantiserte gittervibrasjoner $C \propto T^3$ slik at bidraget til entropien herfra $S = \int (C/T) dT$ kan negliseres for tilstrekkelig lave T .]

Oppgave 2

For en ideell énatomig gass gjelder

$$\frac{pV}{T} = x C_V$$

der $x = 2/3$ da $C_V = \frac{3}{2}nR$. For en fotongass (i et strålingshulrom) gjelder samme relasjon med en annen numerisk konstant enn $2/3$. Hva er x for en fotongass?

Oppgave 3

a) Energitettheten av elektromagnetisk stråling i et strålingshulrom er gitt ved $u = aT^4$. Strålingen ut fra en åpning på overflaten til et slikt hulrom eller fra en overflate mer generelt er proporsjonal denne energitettheten. Utstrålt effekt pr. arealenheter for såkalt svart stråling er gitt ved $j = \sigma T^4$ der $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$ er Stefan-Boltzmanns konstant. Svart stråling gir den maksimale effekten som kan stråle fra en flate.

Sola har diameteren $d = 1,392 \cdot 10^6 \text{ km}$ og ligger i en midlere avstand $R = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$ fra jorda. Hva er utstrålt effekt pr. m^2 når det antas at sola stråler som en ideell svart stråler. Dens effektive overflatetemperatur er $T_0 = 5785 \text{ K}$.

Hva er effekten pr. m^2 som entrer jordatmosfæren?

b) Anta at jorda sender ut igjen effekten som er mottatt fra sola ved at den også stråler som en ideell svart stråler. Hvilken midlere temperatur ville dette gi på jordoverflaten?

Oppgave 4

Cu (kopper) har varmekapasiteten $C_{Cu} = 0,387 \text{ kJ}/\text{kg}$ (ved konstant trykk) mens den for vann er $C_{va} = 1 \text{ cal}/\text{g} = 4,184 \text{ J}/\text{g}$. $4,0 \text{ kg}$ Cu med temperatur 50°C slippes opp i $1,5 \text{ kg}$ vann som har temperaturen 5°C . Systemet kommer i likevekt ved at temperaturen jevner seg ut. Hva blir likevektstemperaturen T når systemet er varmeisolert fra omgivelsene?