Løsning øving 8.

Oppgave 1.

a) Normeringskonstanten er gitt ved

$$1=\sum_s p(s) = C\sum_{s=\pm1} e^{\beta s h} = C(e^{\beta h}+e^{-\beta h}) = 2C\cosh(\beta h),$$

slik at partisjonsfunksjonen blir

$$Z = C^{-1} = \underline{\underline{2\cosh \beta h}}$$

Midlere magnetiske moment blir så

$$m=\langle s\rangle = \sum_{s=\pm1} s\,p(s) = C\left(1\cdot e^{\beta\cdot 1\cdot h} + (-1)e^{\beta(-1)h}\right)$$
$$= Z^{-1}\cdot 2\sinh(\beta h) = \frac{\sinh(\beta h)}{\cosh(\beta h)} = \underline{\underline{\tanh(\beta h)}}$$

[En har også: $m=\langle s\rangle = \frac{1}{Z}\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h}\left(\sum_{s=\pm1} e^{\beta s h}\right) = \frac{1}{Z}\frac{1}{\beta}\frac{\partial Z}{\partial h}$
$= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h}(\ln Z) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial h}(-\beta G) = -\left(\frac{\partial G}{\partial h}\right)_T$, i samsvar med termodynamikkens $dG = -SdT - \mu_0 M dH = -SdT - m dh$.]

b) Med henholdsvis N_+ og N_- spinn med og mot magnetfeltet blir antall konfigurasjoner

$$W = \frac{N!}{N_+!\,N_-!} \qquad \text{der } N = N_+ + N_- .$$

Videre med $Nm = N_+ - N_-$ følger så

$$N_+ = \tfrac{1}{2}(1+m)N \text{ og } N_- = \tfrac{1}{2}(1-m)N$$

Entropien blir følgelig

$$S = k\ln W = k(\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!) =$$
$$N\ln N - N - (N_+\ln N_+ - N_+) - (N_-\ln N_- - N_-) = -N_+\ln\frac{N_+}{N}$$
$$-N_-\ln\frac{N_-}{N} = N\left[-\tfrac{1}{2}(1+m)\ln\left(\tfrac{1}{2}(1+m)\right) - \tfrac{1}{2}(1-m)\ln\left(\tfrac{1}{2}(1-m)\right)\right]$$
$$= \underline{\underline{N\left[\ln 2 - \tfrac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \tfrac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right]}}.$$

c) Entropien $S = S(\beta, m)$ avhenger her kun av m. Når en først setter på magnetfelt h isotermt vil $m = \tanh(\beta h)$ øke. Når så magnetfeltet slås av igjen vil m være uendret slik at $m_2 = m_1$ eller

$$\tanh(\beta_2 h_2) = \tanh(\beta_1 h_1)$$
$$\beta_2 h_2 = \beta_1 h_1$$

slik at resulterende temperatur blir

$$T_2 = \frac{1}{k\beta_2} = \frac{1}{k\beta_1}\frac{h_2}{h_1} = \underline{\underline{T_1\frac{h_2}{h_1}}}$$

Oppgave 2.

~~Fotongassen~~ har indre energi $U = aVT^4$, og trykket er gitt ved $p = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}U/V$. Den spesifikke varme blir så

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4aVT^3 = 4\frac{U}{T}.$$

Følgelig finner en

$$\frac{pV}{T} = \frac{1}{3}\frac{U}{T} = \underline{\underline{\frac{1}{12}C_V}}.$$

Dvs. $x = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}.$

Oppgave 3.

a) Utstrålt effekt pr. m² fra sola

$$j_0 = \sigma T_0^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8} (5{,}785 \cdot 10^3)^4 \, W/m^2 = \underline{\underline{6{,}35 \cdot 10^7 \, W/m^2}}$$

$$= \underline{\underline{6{,}35 \, kW/cm^2}}$$

Utstrålt total effekt (A_0 er areal)

$$P_0 = j_0 A_0 = j_0 \pi d^2.$$

Effekt pr. m² som entrer jordatmosfæren

$$j = \frac{P_0}{A} = j_0 \frac{A_0}{A} = j_0 \frac{\pi d^2}{4\pi R^2} = j_0 \left(\frac{d}{2R}\right)^2 =$$

$$6{,}35 \cdot 10^7 \, W/m^2 \cdot \left(\frac{1{,}392 \cdot 10^6}{2 \cdot 149{,}6 \cdot 10^6}\right)^2 = \underline{\underline{1375 \, W/m^2}}$$

b) Med radius r mottar jorda effekten $P = j \pi r^2$. (πr^2 er arealet som jorda dekker vertikalt stråleretningen, dvs. arealet av sirkel.) Nå stråler hele arealet av jordoverflaten ut igjen. Dette arealet er (kuleflaten) $4\pi r^2$. Middlere utstrålt effekt er følgelig

$$j_u = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{4} j = \sigma T^4$$

Middlere temperatur blir dermed

$$T = \left(\frac{j}{4\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{1375}{4 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}\right)^{1/4} K = \underline{\underline{279 K}} = \underline{\underline{6°C}}$$

Evt.

$$T = \left(\frac{1}{4\sigma} j_0 \left(\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{1/4} = T_0 \sqrt{\frac{d}{4R}} = 5785 K \sqrt{\frac{1{,}392 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 149{,}6 \cdot 10^{-6}}} = \underline{\underline{279 K}}$$

Oppgave 4.

La T_{Cu} og T_{va} være starttemperaturene i henholdsvis i kopperet og vannet. Varmeenergien som avgis fra kopperet overføres til vannet. Energibalansen blir følgelig

$$M_{Cu} C_{Cu} (T_{Cu} - T) = M_{va} C_{va} (T - T_{va})$$

der M_{Cu} og M_{va} er massene til henholdsvis kopperet og vannet. Løst med hensyn på sluttemperaturen gir dette

$$T = \frac{M_{Cu} C_{Cu} T_{Cu} + M_{va} C_{va} T_{va}}{M_{Cu} C_{Cu} + M_{va} C_{va}} =$$

$$T_{va} + \frac{M_{Cu} C_{Cu} (T_{Cu} - T_{va})}{M_{Cu} C_{Cu} + M_{va} C_{va}} = 5°C +$$

$$\frac{4{,}0 \cdot 0{,}387}{4{,}0 \cdot 0{,}387 + 1{,}5 \cdot 4{,}184} (50 - 5)°C = \underline{\underline{13{,}9°C}}$$