Institutt for fysikk, NTNU
TFY4165 og FY1005 Termisk fysikk, våren 2012.

Regneøving 12.

(Veiledning: Mandag 16. april kl. 8.15 - 10.00 og kl. 10.15 - 12.00)

Oppgave 1

En svart overflate som holdes på konstant (høy) temperatur T_h er parallell med en annen svart overflate med konstant temperatur T_l. Det er vakuum mellom platene.

For å redusere varmestrømmen på grunn av stråling innføres et varmeskjold som består av N parallelle svarte plan som plasseres mellom den kalde og varme overflata. Etter en stund oppnås stasjonære forhold.

Beregn hvilken reduksjon av energistrømmen mellom overflatene T_h og T_l varmeskjoldet gir. (Svar: $1/(N+1)$)

Oppgave 2

Poteter av en viss størrelse trenger 25 min for å koke ferdig. Anta at poteter er kokt ferdig når temperaturen i midten overstiger en viss verdi. Hvor lang tid trengs da for å koke ferdig poteter av samme type og samme form, men som er dobbelt så tunge?
(Svar: 40 min)

Oppgave 3

I øving 9 ble sammenhengen mellom trykk p og temperatur T for elektroner i vakuum utenfor en metalloverflate funnet som

$$p = CT^{5/2} \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right)$$

der C er en konstant og ϕ er bindingsenergi. Elektrontettheten i vakuum fører til en netto elektronstrøm mot metalloverflaten og da naturlig nok en tilsvarende strøm ut for å opprettholde likevekten. Bestem hvordan denne elektronstrømmen I ut fra en metalloverflate varierer med temperaturen T. (Svar: $AT^2 \exp(-\phi/(kT))$, $A =$konst)

Oppgave 4

a) Vis ved innsetting at

$$T = T(r,t) = a\frac{\sin(kr)}{r}\,e^{-Dk^2t}$$

er en løsning av diffusjonslikningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T \quad \text{der} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r \quad \text{med kulesymmetri.}$$

b) En mer vilkårlig kulesymmetrisk løsning er gitt ved

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin(k_n r)}{r} e^{-Dk_n^2 t} + T_\infty .$$

Størrelsene a_n og k_n bestemmes av grensebetingelsene. Hvilke verdier kan k_n ha når en grensebetingelse er at $T(R,t) = T_\infty$?

c) Varmeledningslikningen skal ved siden av grensebetingelsen $T(R,t) = T_\infty$ løses med begynnelsesbetingelsen

$$T(r,0) - T_\infty = T_0 \ \ (= \text{konst}), \quad (\text{for } \ r < R).$$

Koeffisientene a_n kan så bestemmes ved å regne ut integralet

$$a_m = \frac{2}{R}\int_0^R (T(r,0) - T_\infty) r \sin(k_m r)\, dr.$$

Vis ved å sette inn uttrykket under punkt b) at dette gir riktig verdi for a_m. [Dette tilsvarer rekkeutvikling av en vilkårlig funksjon i egentilstander i kvantemekanikk. Her blir dette en fourier-rekke (sinusrekke) av funksjonen $(T - T_\infty)r$ i intervallet $-R < r < R$.] Regn så ut koeffisientene a_n. (Svar: $2RT_0/(n\pi)(-1)^{n-1}$)

Oppgitt: $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ og
$\int x\sin(\alpha x)\,dx = -x\cos(\alpha x)/\alpha + \sin(\alpha x)/\alpha^2$.

d) For store tider ($\exp(-Dk_1^2 t) \ll 1$) vil leddet med k_1 dominere slik at de øvrige leddene kan neglisjeres. Betrakt så avkjøling av en kule der grensebetingelsene er som under punkt c). Anta at kula består vesentlig av vann (som er bundet slik at det ikke kan strømme). Ved hvilken tid $t = \tau$ er temperaturen i midten av kula ($r = 0$) sunket til $T = 0{,}1\,T_0 + T_\infty$ (slik at k_1-leddet dominerer) når $R = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ og $D = D_T = 0{,}00050\,\mathrm{m}^2/\mathrm{h}$ for vann?
(Svar: 1 time 31 min)
Oppgitt: $\sin x/x \to 1$ når $x \to 0$.

e) Bestem $T(r,t)$ numerisk for $0 < r < R$ og $0 < t < t_{\max}$, med (f.eks.) $t_{\max} = 3$ timer. Prøv deg fram når det gjelder hvor mange ledd du skal ta med i fourier-rekken. Lag en animasjon som viser tidsutviklingen av temperaturprofilen $T(r)$. Lag også figurer med hhv $T(t)$ for utvalgte verdier av posisjonen r og $T(r)$ for utvalgte tidspunkter t. Bruk 4 - 5 kurver pr figur.

Nedenfor finner du et eksempel på hvordan man kan lage en animasjon i Matlab ved å slette den gamle grafen og tegne en ny graf i samme figur.

```
%Tabell med tidspunkter
t=0:1:20;
%Tabell med posisjoner
r=0.00:0.01:1.00;
%Starttabell for f(r) med like mange elementer som tabellen for posisjonen r:
f = linspace(0,10,length(r));
%Neste linje setter EraseMode til xor, bra for "smooth animation", se
%http://nd.edu/~dtl/cheg258/notes/doc/tec2.5.html
p=plot(r,f,'-','EraseMode','xor');
%Sett aksegrenser [xmin xmax ymin ymax]:
axis([0 1 0 2]);
%Nodvendig med "hold on" for fortsatt bruk av samme figur:
hold on;
xlabel('Posisjonen r');
ylabel('Funksjonen f');
title('Animasjon av f(r,t)');
for i = 1 : length(t),
 for k = 1 : length(r),
  f(k) = sin(r(k)*t(i))^2;
 end
 %Plott f(r,t) for aktuelt tidspunkt:
 set(p,'XData',r,'YData',f)
 %Oppdaterer grafen i figuren:
 drawnow
 %Forsinker framvisningen i 0.2 s (juster etter behov):
 pause(0.2);
end
hold off;
```