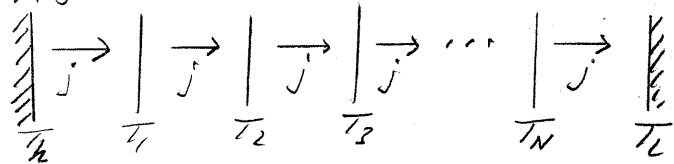


Løsning øving 12.

①

Oppgave 1.

Ved steady-state forhold er varmestrømmen j mellom skjoldene den samme over alt. Etter Stefan-Boltzmanns lov er netto varmestrøm pr. flateenhet

$$1. \text{ intervall: } j = \sigma(T_h^4 - T_1^4)$$

$$2. \text{ -- -- } j = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$N\text{-te intervall: } j = \sigma(T_N^4 - T_c^4)$$

$$\text{Siste intervall: } j = \sigma(T_N^4 - T_c^4)$$

De mellomliggende ukjente temperaturer kan nå elimineres ved å addere slik at vi finner

$$(N+1)j = \sigma(T_h^4 - T_c^4) = j_0$$

$$j/j_0 = \frac{1}{N+1}$$

der j_0 er varmestrømmen uten skjold. [Temperaturen på skjoldene kan bestemmes ved å addere de k første intervallene. Dette gir $kj = \sigma(T_h^4 - T_k^4)$ eller $T_h^4 = T_k^4 + \frac{kj}{\sigma}$. $\frac{1}{\sigma}kj$ som innsett for j gir $T_h^4 = \left[\frac{(N+1-k)T_h^4 + kT_c^4}{N+1} \right]^{1/4}$.]

Oppgave 2

②

For diffusjon av partikler fant vi at diffusjonslengden r går som kvadratroten av tiden t , dvs $r \sim \sqrt{t}$. Det samme må da gjelde for varmetransport som beskrives ved samme differensiallikning. Når lengdedimensjoner endres med en faktor a , vil følgende tidsforløp endres med en faktor a^2 for system av samme form. [Differensiallikningen bli uendret dersom nye variable $t' = t/a^2$ og $r' = r/a$ innføres og samme grensebetingelser brukes.]

Når tyngden og dermed volumet til potetene endres med en faktor $v=2$ vil lengder endres med en faktor

$$a = v^{1/3} = 2^{1/3}$$

Tiden endres derfor med faktoren

$$Z = a^2 = 2^{2/3} = 1,59$$

Så med dobbelt så tunge poteter endres koketiden til

$$25 \text{ min} \cdot Z \approx \underline{\underline{40 \text{ min}}}$$

Oppgave 3.

Partikkelstrømte tettheten er $j = \frac{1}{4}n \langle v \rangle \sim n \langle v \rangle$. Elektronstrømmen I ut fra en gitt flate er proporsjonal med j , dvs. $I \sim n \langle v \rangle$. For partikkelhastigheten har en $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$. Partikkel tettheten $n = N/V$ er bestemt av likningen for ideell gass $p = n k T$ eller

$$n = \frac{p}{kT}$$

Følgelig finner en

$$I = \text{konst.} \cdot \frac{p}{kT} \sqrt{T} = \underline{\underline{A T^2 \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right)}}$$

der A er en konstant.

3) Dette resultatet er Richardson - Dushmans
 ligning for termionisk emisjon. Denne bestemmer
 medningsstrømmen eller maksimal strøm fra en metallflate
 (glødepåbilde). Elektroner som kommer ut danner en elektronsky
 av romladning som vil motvirke påtrykt elektrisk felt for å fjerne
 elektronene. Elektronstrømmen øker derfor gradvis etter hvert
 som det påtrykte elektriske feltet øker.

Oppgave 4.

a) Med kulesymmetri blir $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r$. En finner så

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\sin kr}{r} (-Dk^2) e^{-Dk^2 t} = -\frac{Dk^2 T}{r}$$

$$\nabla^2 T = a (-k^2) \frac{\sin kr}{r} e^{-Dk^2 t} = -k^2 T$$

Følgelig er den gitte T løsning av $\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T$.

b) Grensebetingelsen $T=0$ for $r=R$ innebærer at

$$\sin k_n R = 0$$

$$\text{eller } k_n R = n\pi$$

$$k_n = n \frac{\pi}{R} \quad \text{der } n \text{ er heltall}$$

c) Ved å sette inn det gitte uttrykket for T i integralet
 for a_m finner en (t=0)

$$a_m = \frac{2}{R} \sum_n a_n \int_0^R \frac{\sin k_n r}{r} r \sin(k_m r) dr = \frac{2}{R} \sum_n a_n \frac{1}{2} \int_0^R \{\cos[(n-m)\frac{\pi}{R}r] - \cos[(n+m)\frac{\pi}{R}r]\} dr = \frac{2}{R} \sum_n a_n \frac{1}{2} R \delta_{nm} = a_m$$

som skulle vises. Her er brukt at

$$\int_0^R \cos(q \frac{\pi}{R} r) dr = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(q \frac{\pi}{R}) = 0, \text{ for } q \text{ heltall, } q \neq 0.$$

$$\int_0^R \cos(0) dr = \int_0^R dr = R.$$

4) Med den gitte grensebetingelsen blir koeffisientene

$$a_n = \frac{2}{R} T_0 \int_0^R r \sin k_n r dr = \frac{2}{R} T_0 \left(-\frac{r \cos k_n r}{k_n} + \frac{\sin k_n r}{k_n^2} \right) \\ = \frac{2}{R} T_0 \left(-\frac{R \cos(n\pi)}{k_n} + 0 \right) = \frac{2 T_0}{k_n} (-1)^{n-1} = \frac{2 R T_0}{n\pi} (-1)^{n-1}$$

d) Siden $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin k_n r}{k_n r} = 1$ har en at

$$T(0,t) - T_\infty = \sum_n a_n k_n e^{-Dk_n^2 t} \rightarrow a_n k_n e^{-Dk_n^2 t} = 2 T_0 e^{-Dk_n^2 t}$$

Ved tiden $t = \tau$ har en så

$$T(0,\tau) - T_\infty = 2 T_0 e^{-Dk_1^2 \tau} = \frac{1}{20} T_0$$

Løst mhp. τ gir så dette

$$e^{-Dk_1^2 \tau} = \frac{1}{20} = 0,05 \quad (<< 1)$$

$$\tau = \frac{-\ln 0,05}{Dk_1^2} = \frac{-\ln 0,05}{D} \left(\frac{R}{\pi} \right)^2 = \frac{-\ln 0,05}{0,0005 \text{ m}^2/\text{s}} \left(\frac{0,05 \text{ m}}{\pi} \right)^2 =$$

$$\frac{1,52 \text{ h} \approx 1 \text{ time } 3/\text{min}}{=} = 5460 \text{ s.}$$

[Kontroll av rekkeutvikling ($x = \pi \frac{R}{\pi}$), $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} x^n$]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\alpha) = \frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} [e^{i\alpha n} - e^{-i\alpha n}] = \frac{1}{2i} [\ln(1+e^{i\alpha}) - \ln(1+e^{-i\alpha})]$$

$$= \frac{1}{2i} [\ln(1+\cos\alpha + i\sin\alpha) - \ln(1+\cos\alpha - i\sin\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{2i} \left\{ \ln\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\right] (\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}) - \ln\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\right] (\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}) \right\} = \frac{1}{2i} 2i \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Jordt $\ln(re^{i\varphi}) = \ln[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \ln r + i\varphi$. Se alt i alt

$$T(r,0) - T_\infty = \frac{2RT_0}{r\pi} \frac{\alpha}{2} = \frac{2RT_0}{r\pi} \frac{1}{2} \pi \frac{r}{R} = T_0, \text{ som vi skulle vise.}]$$