

**Eksamen FY1004 Innføring i kvantemekanikk**  
**Fredag 30. mai 2008**  
**Løsninger**

1a)

$$\begin{aligned}\langle \sigma_x \rangle &= \psi^\dagger \sigma_x \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ \langle \sigma_y \rangle &= \psi^\dagger \sigma_y \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = 0, \\ \langle \sigma_z \rangle &= \psi^\dagger \sigma_z \psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.\end{aligned}$$

Vi sier at tilstanden  $\psi$  har spinn opp i  $z$ -retningen fordi den er en egentilstand med egenverdi  $+\hbar/2$  for  $z$ -komponenten av spinnnet,  $S_z = (\hbar/2)\sigma_z$ . Vi har at  $\sigma_z\psi = \psi$ , og derfor  $S_z\psi = (\hbar/2)\psi$ .

1b)

$$\begin{aligned}\langle \sigma_x \rangle &= \psi^\dagger \sigma_x \psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \\ \langle \sigma_y \rangle &= \psi^\dagger \sigma_y \psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 1, \\ \langle \sigma_z \rangle &= \psi^\dagger \sigma_z \psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Fordi

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

er

$$\langle \sigma_x^2 \rangle = \langle \sigma_y^2 \rangle = \langle \sigma_z^2 \rangle = \langle I \rangle = \psi^\dagger I \psi = \psi^\dagger \psi = 1.$$

Følgelig er

$$\begin{aligned}\text{var}(\sigma_x) &= \langle \sigma_x^2 \rangle - \langle \sigma_x \rangle^2 = 1 - 0 = 1, \\ \text{var}(\sigma_y) &= \langle \sigma_y^2 \rangle - \langle \sigma_y \rangle^2 = 1 - 1 = 0, \\ \text{var}(\sigma_z) &= \langle \sigma_z^2 \rangle - \langle \sigma_z \rangle^2 = 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

Den fysiske tolkningen av at  $\text{var}(\sigma_y) = 0$ , er at vi får samme verdi hver gang vi måler  $\sigma_y$ . At dessuten  $\langle \sigma_y \rangle = 1$ , betyr at den verdien vi får hver gang vi måler  $\sigma_y$ , er 1. Altså er dette en tilstand som har spinn opp i  $y$ -retningen.

At  $\text{var}(\sigma_y) = 0$  i tilstanden  $\psi$ , er matematisk sett det samme som at  $\psi$  er en egentilstand for  $\sigma_y$ .

1c) Egenverdiene til  $\vec{L}^2$  skrives som  $\ell(\ell + 1)\hbar^2$ , egenverdiene til  $L_z$  og  $S_z$  skrives som  $m_\ell\hbar$  og  $m_s\hbar$ . Med hovedkvantetall  $n = 2$  i hydrogenatomet kan vi ha:

$$\begin{aligned} \ell = 0, m_\ell = 0, m_s = \pm\frac{1}{2} \text{ (to tilstander), eller} \\ \ell = 1, m_\ell = -1, 0, 1, m_s = \pm\frac{1}{2} \text{ (seks tilstander).} \end{aligned}$$

1d) Omregning som trengs:

$$CrY_{11}(\theta, \varphi) = -C \sqrt{\frac{3}{8\pi}} r \sin\theta (\cos\varphi + i \sin\varphi) = C'(x + iy) .$$

Der altså

$$C' = -C \sqrt{\frac{3}{8\pi}} .$$

Tilstanden  $\Phi$  som det spørres etter, skal inneholde en spinor med spinn langs  $y$ -aksen, som vi kan hente fra punkt 1b) ovenfor.

Tilstanden  $\Psi$  med  $L_z$  kvantisert til  $+\hbar/2$  inneholder en faktor  $x + iy$ . I forhold til  $z$ -aksen ligger  $x$ -aksen og  $y$ -aksen på samme måte som  $z$ -aksen og  $x$ -aksen ligger i forhold til  $y$ -aksen. Da trekker vi den slutningen at tilstanden  $\Phi$  med  $L_y$  kvantisert til  $+\hbar/2$  må inneholde en faktor  $z + ix$ . Bortsett fra en vilkårlig fasefaktor er tilstanden  $\Phi$  dermed entydig fastlagt, vi har at

$$\Phi = \frac{C'}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (z + ix) e^{-\frac{r}{2a}} .$$

Det spørres ikke i oppgaven etter å uttrykke  $\Phi$  ved de sfæriske harmoniske, men vi kan jo gjøre det likevel:

$$\begin{aligned} \Phi &= -C \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} r (\cos\theta + i \sin\theta \cos\varphi) e^{-\frac{r}{2a}} \\ &= -C \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} r e^{-\frac{r}{2a}} \left( \frac{1}{2} Y_{10}(\theta, \varphi) + i \frac{1}{2\sqrt{2}} (Y_{1,-1}(\theta, \varphi) - Y_{11}(\theta, \varphi)) \right) . \end{aligned}$$

2a) Det er økonomisk å skrive  $M = m_1 + m_2$ . Ellers er det rett fram å kommutere.

$$\begin{aligned} [x, p_x] &= \left[ x_1 - x_2, \frac{m_2 p_{1x} - m_1 p_{2x}}{M} \right] \\ &= \frac{1}{M} (m_2([x_1, p_{1x}] - [x_2, p_{1x}]) - m_1([x_1, p_{2x}] - [x_2, p_{2x}])) \\ &= \frac{1}{M} (m_2(i\hbar - 0) - m_1(0 - i\hbar)) = i\hbar . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, P_x] &= \left[ \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, p_{1x} + p_{2x} \right] \\ &= \frac{1}{M} (m_1([x_1, p_{1x}] + [x_1, p_{2x}]) + m_2([x_2, p_{1x}] + [x_2, p_{2x}])) \\ &= \frac{1}{M} (m_1(i\hbar + 0) + m_2(0 + i\hbar)) = i\hbar . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x, P_x] &= [x_1 - x_2, p_{1x} + p_{2x}] = [x_1, p_{1x}] + [x_1, p_{2x}] - [x_2, p_{1x}] - [x_2, p_{2x}] \\ &= i\hbar + 0 - 0 - i\hbar = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, p_x] &= \left[ \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \frac{m_2 p_{1x} - m_1 p_{2x}}{M} \right] \\ &= \frac{1}{M^2} \left( m_1 m_2 [x_1, p_{1x}] - m_1^2 [x_1, p_{2x}] + m_2^2 [x_2, p_{1x}] - m_1 m_2 [x_2, p_{2x}] \right) \\ &= \frac{1}{M^2} (m_1 m_2 i\hbar - 0 + 0 - m_1 m_2 i\hbar) = 0. \end{aligned}$$

2b) Skriv  $M = m_1 + m_2$ . Vi kan uttrykke  $\vec{p}_1$  og  $\vec{p}_2$  ved  $\vec{P}$  og  $\vec{p}$ , det gir at

$$\vec{p}_1 = \frac{m_1}{M} \vec{P} + \vec{p}, \quad \vec{p}_2 = \frac{m_2}{M} \vec{P} - \vec{p}.$$

Vi husker på at  $\vec{P}$  og  $\vec{p}$  kommuterer, slik at  $\vec{P} \cdot \vec{p} = \vec{p} \cdot \vec{P}$ . Dermed har vi at

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V = \frac{1}{2m_1} \left( \frac{m_1}{M} \vec{P} + \vec{p} \right)^2 + \frac{1}{2m_2} \left( \frac{m_2}{M} \vec{P} - \vec{p} \right)^2 + V \\ &= \frac{1}{2m_1} \left( \frac{m_1^2}{M^2} \vec{P}^2 + 2 \frac{m_1}{M} \vec{P} \cdot \vec{p} + \vec{p}^2 \right) + \frac{1}{2m_2} \left( \frac{m_2^2}{M^2} \vec{P}^2 - 2 \frac{m_2}{M} \vec{P} \cdot \vec{p} + \vec{p}^2 \right) + V \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2M^2} \vec{P}^2 + \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \vec{p}^2 + V = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2m} + V. \end{aligned}$$

2c) Sett inn produktbølgefunksjonen  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_{\text{ms}}(\vec{R}) \psi_{\text{rel}}(\vec{r})$  i den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen  $H\psi = E\psi$ , og divider hele ligningen med  $\psi$ . Det gir ligningen

$$\frac{\vec{P}^2 \psi_{\text{ms}}(\vec{R})}{2M \psi_{\text{ms}}(\vec{R})} + \frac{\vec{p}^2 \psi_{\text{rel}}(\vec{r})}{2m \psi_{\text{rel}}(\vec{r})} + V(\vec{r}) = E.$$

Energien  $E$  på høyre side av likhetstegnet skal være en konstant. Venstre side avhenger av  $\vec{R}$  i første ledd og av  $\vec{r}$  i andre og tredje ledd. For at venstre side skal være konstant, må første ledd være lik en konstant, som vi velger å kalle  $E_{\text{ms}}$ , og summen av andre og tredje ledd må være lik en annen konstant, som vi kaller  $E_{\text{rel}}$ . Det gir ligningen  $E = E_{\text{ms}} + E_{\text{rel}}$ , samt de to tidsuavhengige Schrödinger-ligningene

$$\frac{\vec{P}^2}{2M} \psi_{\text{ms}}(\vec{R}) = E_{\text{ms}} \psi_{\text{ms}}(\vec{R})$$

og

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} \psi_{\text{rel}}(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi_{\text{rel}}(\vec{r}) = E_{\text{rel}} \psi_{\text{rel}}(\vec{r}).$$

Ligningen for  $\psi_{\text{ms}}(\vec{R})$  er rett og slett ligningen for en fri partikkel, som har løsninger for enhver positiv verdi av energien  $E_{\text{ms}}$ .

2d) Energieigenverdien  $E_1$  for grunntilstanden i hydrogenatomet er relativenergien  $E_{\text{rel}}$ , når vi bruker terminologien fra forrige punkt. Vi finner den ved å løse Schrödinger-ligningen for relativbevegelsen, der massen er den reduserte massen. Derfor er det den reduserte massen som bestemmer energien.

Med to masser  $m_1$  og  $m_2$  er den reduserte massen

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_1 \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Når  $m_1$  er mye mindre enn  $m_2$ , er massereduksjonen liten, den relative differensen  $(m_1 - m)/m_1$  er da omtrent  $m_1/m_2$ . For hydrogen, med  $m_1 = m_e$  og  $m_2 = m_p$ , er

$$\frac{m_1}{m_2} = 0,000\,544\,62, \quad m = m_1 \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{1}{1,000\,544\,62} m_e = 0,999\,455\,68 m_e.$$

For deuterium, med  $m_1 = m_e$  og  $m_2 = m_d \approx 2m_p$ , er

$$\frac{m_1}{m_2} = 0,000\,272\,44, \quad m = \frac{1}{1,000\,272\,44} m_e = 0,999\,727\,63 m_e.$$

Reduksjonsfaktoren er  $1/2$  når de to massene er like store, som for eksempel i positronium. Det gjør at grunntilstandsenergien er  $-6,8$  eV i positronium, halvparten av de  $-13,6$  eV som gjelder for hydrogen.

2e) Forholdet mellom den reduserte massen for deuterium og for hydrogen er

$$k = \frac{0,999\,727\,63 m_e}{0,999\,455\,68 m_e} = 1,000\,272\,10.$$

Forholdet mellom energinivåene i de to atomene er  $k$ , forholdet mellom frekvensene til spektrallinjene er  $k$ , og forholdet mellom bølgelengdene er da

$$\frac{1}{k} = 0,999\,727\,98.$$

Bølgelengden til deuterium  $\alpha$ -linjen er altså

$$0,999\,727\,98 \times 656,28 \text{ nm} = 656,10 \text{ nm}.$$

Forskjellen mellom linjene til hydrogen og deuterium er  $2,7 \times 10^{-4}$ . Den er bortimot 10 ganger Doppler-bredden for linjene i solspektret, og altså godt synlig, når bare spektrometeret har tilstrekkelig oppløsning.

Denne utregningen reduseres til hoderegning hvis vi sier at

$$\frac{m_e}{m_p} \approx \frac{1}{2000}, \quad \frac{m_e}{m_d} \approx \frac{m_e}{2m_p} \approx \frac{1}{4000}.$$

Da er

$$k = \frac{1 + \frac{m_e}{m_p}}{1 + \frac{m_e}{m_d}} \approx \frac{1 + \frac{m_e}{m_p}}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} \approx 1 + \frac{m_e}{m_p} - \frac{m_e}{2m_p} = 1 + \frac{m_e}{2m_p} \approx 1 + \frac{1}{4000} = 1,000\,25,$$

og

$$\frac{1}{k} \approx 1 - \frac{1}{4000} = 0,999\,75.$$

3a) Med  $\psi = \psi(x, t) = C e^{-\alpha x^2 + \beta(t)x + \gamma(t)}$  har vi at

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left( \frac{d\beta}{dt} x + \frac{d\gamma}{dt} \right) \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= (-2\alpha x + \beta) \psi, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= (-2\alpha + (-2\alpha x + \beta)^2) \psi = (4\alpha^2 x^2 - 4\alpha\beta x + \beta^2 - 2\alpha) \psi.\end{aligned}$$

Schrödinger-ligningen ser da slik ut:

$$i\hbar \left( \frac{d\beta}{dt} x + \frac{d\gamma}{dt} \right) \psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} (4\alpha^2 x^2 - 4\alpha\beta x + \beta^2 - 2\alpha) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \psi.$$

Vi kan dividere hele ligningen med  $\psi$ , og samle potensene av  $x$ , det gir ligningen

$$\left( \frac{2\hbar^2\alpha^2}{m} - \frac{1}{2} m\omega^2 \right) x^2 + \left( i\hbar \frac{d\beta}{dt} - \frac{2\hbar^2\alpha\beta}{m} \right) x + i\hbar \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\hbar^2(\beta^2 - 2\alpha)}{2m} = 0.$$

For at ligningen skal være oppfylt for alle verdier av  $x$ , må koeffisienten for hver potens av  $x$  være 0, altså

$$\frac{2\hbar^2\alpha^2}{m} - \frac{1}{2} m\omega^2 = 0, \quad i\hbar \frac{d\beta}{dt} - \frac{2\hbar^2\alpha\beta}{m} = 0, \quad i\hbar \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\hbar^2(\beta^2 - 2\alpha)}{2m} = 0.$$

Etter noe omforming gir det de tre oppgitte ligningene.

Merk: vi må forutsette at  $\alpha > 0$ . For  $\alpha < 0$  gir bølgefunksjonen ingen mening, fordi den divergerer for sterkt i grensene  $x \rightarrow \pm\infty$ .

3b) Av koeffisientene  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\gamma$  er  $\alpha$  reell, mens  $\beta$  og  $\gamma$  er komplekse. Da er

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi = (C^* e^{-\alpha x^2 + \beta^* x + \gamma^*}) (C e^{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma}) = |C|^2 e^{-2\alpha x^2 + (\beta + \beta^*) x + \gamma + \gamma^*}.$$

De oppgitte formlene gir at

$$\begin{aligned}\beta + \beta^* &= 2\alpha x_0 \left( e^{-i\omega t} + e^{i\omega t} \right) = 4\alpha x_0 \cos(\omega t), \\ \gamma + \gamma^* &= -i \frac{\omega t}{2} + i \frac{\omega t}{2} - \frac{\alpha x_0^2}{2} \left( e^{-2i\omega t} + e^{2i\omega t} \right) = -\alpha x_0^2 \cos(2\omega t) \\ &= -\alpha x_0^2 (\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) = -\alpha x_0^2 (2 \cos^2(\omega t) - 1).\end{aligned}$$

Når vi setter inn det, får vi at

$$|\psi|^2 = |C|^2 e^{-2\alpha(x - x_0 \cos(\omega t))^2 + \alpha x_0^2}.$$

3c) I følge derivasjonen vi gjorde under punkt 3a) er

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\hbar(-2\alpha x + \beta) \psi .$$

Det gir, i følge den oppgitte definisjonen av  $\langle p \rangle$ , at

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= -i\hbar(-2\alpha \langle x \rangle + \beta) = -i\hbar(-2\alpha x_0 \cos(\omega t) + 2\alpha x_0 e^{-i\omega t}) \\ &= -i\hbar(-2i\alpha x_0 \sin(\omega t)) = -2\hbar\alpha x_0 \sin(\omega t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t) . \end{aligned}$$

For å beregne  $\langle p^2 \rangle$  viser vi også til derivasjonen under punkt 3a). Vi har at

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* (-\hbar^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* (4\alpha^2 x^2 - 4\alpha\beta x + \beta^2 - 2\alpha) \psi \\ &= -\hbar^2(4\alpha^2 \langle x^2 \rangle - 4\alpha\beta \langle x \rangle + \beta^2 - 2\alpha) . \end{aligned}$$

Det fører fram å gå direkte løs på dette uttrykket, men vi kan spare arbeid ved å omforme litt, og så bruke oppgitte resultater, foruten det resultatet vi nettopp regnet ut. Vi har at

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= -\hbar^2(4\alpha^2 (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) + (-2\alpha \langle x \rangle + \beta)^2 - 2\alpha) \\ &= -\hbar^2 \left( 4\alpha^2 \frac{1}{4\alpha} + (-2i\alpha x_0 \sin(\omega t))^2 - 2\alpha \right) \\ &= 4\hbar^2 \alpha^2 x_0^2 \sin^2(\omega t) + \hbar^2 \alpha = m^2 \omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t) + \frac{\hbar m \omega}{2} . \end{aligned}$$

Selvsagt er forventningsverdiene  $\langle p \rangle$  og  $\langle p^2 \rangle$  reelle. Det må de være, siden  $p$  og  $p^2$  er Hermiteske operatører.

3d)

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} , \quad \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} .$$

For det første ser vi at usikkerhetene  $\Delta x$  og  $\Delta p$  er tidsuavhengige. Det er visst bare potensialet for en harmonisk oscillator som er slik at det finnes løsninger av den tidsavhengige Schrödinger-ligningen med både  $\Delta x$  og  $\Delta p$  tidsuavhengige.

For det andre ser vi at Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er oppfylt som en likhet,

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} ,$$

mens det som gjelder for en vilkårlig tilstand, er ulikheten  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ . Derfor kaller vi den koherente tilstanden for en minimum usikkerhetstilstand.

Forventningsverdien av energien er

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \langle x^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t) + \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 \cos^2(\omega t) + \frac{\hbar\omega}{4} \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 + \frac{\hbar\omega}{2} . \end{aligned}$$

Den er tidsuavhengig, selv om forventningsverdiene av  $p^2$  og  $x^2$  er tidsavhengige hver for seg. Dette er et så fundamentalt resultat at hvis vi fant en tidsavhengig forventningsverdi  $\langle H \rangle$ , så kunne vi si umiddelbart at vi hadde regnet feil.

Vi vet nemlig at når Hamilton-operatoren  $H$  ikke er eksplisitt tidsavhengig, så er energien bevart. Det gjelder i kvantemekanikken, som det gjelder i klassisk mekanikk.

En bevegelseskonstant i kvantemekanikken er pr. definisjon en observabel  $A$  som har tidsuavhengig forventningsverdi  $\langle A \rangle$  i enhver tilstand. Og hva er betingelsen for det? Jo, for en operator  $A$  som ikke er eksplisitt tidsavhengig, gjelder at

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle .$$

En observabel  $A$  er følgelig en bevegelseskonstant når den kommuterer med  $H$ .

Siden  $H$  kommuterer med seg selv, er den en bevegelseskonstant.

Her er et bevis for formelen ovenfor. I Dirac-notasjon har vi at forventningsverdien av  $A$  i en tilstand  $|\psi\rangle$  er

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle .$$

Tidsderivasjon gir at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A \rangle &= \left( \frac{d}{dt} \langle \psi | \right) A | \psi \rangle + \langle \psi | A \left( \frac{d}{dt} | \psi \rangle \right) = \left( \frac{i}{\hbar} \langle \psi | H \right) A | \psi \rangle + \langle \psi | A \left( -\frac{i}{\hbar} H | \psi \rangle \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \psi | (HA - AH) | \psi \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle . \end{aligned}$$

Vi bruker den tidsavhengige Schrödinger-ligningen for tilstanden  $|\psi\rangle$ ,

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi \rangle = H | \psi \rangle .$$

Hermiteisk konjugering av den gir at

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi | = \left( i\hbar \frac{d}{dt} | \psi \rangle \right)^\dagger = (H | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | H .$$

- 3e) Den koherente tilstanden ligner maksimalt på en klassisk tilstand ved at den til enhver tid har et minimalt usikkerhetsprodukt  $\Delta x \Delta p$ . Av uttrykket for  $|\psi|^2$  ser vi at vi har en Gaussisk bølgepakke som ved tiden  $t$  har sitt topp-punkt i posisjonen  $x_0 \cos(\omega t)$ . Bølgepakken oscillerer fram og tilbake, uten å spre seg utover, på samme måte som den klassiske oscillatoren oscillerer, og med den samme frekvensen.

Hvis den klassiske harmoniske oscillatoren har posisjonen  $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$  ved tiden  $t$ , så har den hastighet  $v(t) = (d/dt) x(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$  og impuls  $p(t) = mv(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$ . Energien ved tiden  $t$  er da

$$E(t) = \frac{(p(t))^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x(t))^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 .$$

Den er igjen tidsuavhengig. Forventningsverdien  $\langle H \rangle$  for en koherent tilstand til den kvantemekaniske oscillatoren er lik den klassiske energien pluss nullpunktenergien  $\hbar\omega/2$ .