Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 73 59 36 53 (mobil 90 07 51 72)

Eksamen i fag FY1004 Innføring i kvantemekanikk
Lørdag 1. desember 2007
Tid: 09.00–15.00

Sensurfrist: Lørdag 22. desember 2007

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematiske tabeller.

Alle deloppgaver teller likt ved sensuren.

Noen nyttige konstanter:

Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Den reduserte Plancks konstant:	$\hbar = 1,055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

Oppgave 1:

En partikkel med masse m beveger seg i en dimensjon. Tilstanden til partikkelen beskrives ved en bølgefunksjon $\psi = \psi(x)$, der argumentet x er posisjonen. For en normert bølgefunksjonen ψ gjelder at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, |\psi(x)|^2 = 1 \; . \tag{1}$$

Vi bruker her den samme notasjonen x både for argumentet i bølgefunksjonen og for posisjonsoperatoren, som transformerer en bølgefunksjon ψ over i en annen bølgefunksjon $\phi = x\psi$ definert ved at $\phi(x) = x\,\psi(x)$.
Impulsen (bevegelsesmengden) til partikkelen representeres ved derivasjonsoperatoren

$$p = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \; .$$

Den Hermitesk konjugerte $A^\dagger$ til en operator A defineres ved at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \psi^* \, (A^\dagger \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; (A\psi)^* \, \phi$$

for to vilkårlige bølgefunksjoner ψ og ϕ. Vi sier at A er Hermitesk hvis $A^\dagger = A$.

a) Vis at posisjonsoperatoren x og impulsoperatoren p begge er Hermiteske operatorer.

b) Kommutatoren mellom to operatorer A og B defineres som $[A, B] = AB - BA$.
Utled den kanoniske kommutasjonsrelasjonen $[x, p] = \mathrm{i}\hbar$.

Hamilton-operatoren for en endimensjonal harmonisk oscillator med vinkelfrekvens ω er

$$H = \frac{1}{2m}\, p^2 + \frac{1}{2}\, m\omega^2 x^2 \ .$$

En karakteristisk lengde for oscillatoren er

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \ .$$

Når vi definerer operatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} + \mathrm{i}\,\frac{\ell}{\hbar}\, p\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} + \ell\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right),$$

så er

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} - \mathrm{i}\,\frac{\ell}{\hbar}\, p\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} - \ell\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right).$$

c) Vis kommutasjonsrelasjonene $[H, a] = -\hbar\omega a$ og $[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$.

Bruk dem til å vise at hvis ψ er en egentilstand for H med egenverdi E, altså

$$H\psi = E\psi \ ,$$

så er $\psi_a = a\psi$ og $\psi_b = a^\dagger\psi$ begge egentilstander for H med egenverdier henholdsvis $E_a = E - \hbar\omega$ og $E_b = E + \hbar\omega$.

d) Grunntilstanden til oscillatoren, ψ_0, må være løsning av ligningen $a\psi_0 = 0$. Hvorfor?

Vis at

$$\psi_0(x) = C\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2} \ ,$$

der C og α er konstanter. Uttrykk α ved den karakteristiske lengden ℓ.

Hva er energien E_0 i denne tilstanden?

Vi kan her se bort fra normeringsbetingelsen, ligning (1), og sette $C = 1$.

e) Finn også de to første eksiterte tilstandene $\psi_1 = a^\dagger\psi_0$ og $\psi_2 = a^\dagger\psi_1 = (a^\dagger)^2\psi_0$.

Hva er de tilsvarende energiene E_1 og E_2?

Det forlanges ikke her at bølgefunksjonene ψ_1 og ψ_2 skal normeres.

f) Hvis $\psi(-x) = \eta\,\psi(x)$, der η er et tall, sier vi at tilstanden ψ har paritet η.

Hvilke verdier er mulige for pariteten η? Begrunn svaret.

g) Hva er paritetene til ψ_0, ψ_1 og ψ_2, de tre laveste energiegentilstandene til den harmoniske oscillatoren?

Hva er pariteten til ψ_n, den n-te eksiterte tilstanden til den harmoniske oscillatoren? Begrunn svaret.

h) Finnes det bølgefunksjoner som ikke har noen bestemt paritet?

Finnes det energiegentilstander til den endimensjonale harmoniske oscillatoren som ikke har noen bestemt paritet? Begrunn svaret.

Oppgave 2:

En partikkel med masse m beveger seg i tre dimensjoner. Den potensielle energien til partikkelen i posisjonen $\vec{r}$ er gitt ved det tredimensjonale harmoniske oscillator-potensialet

$$V = V(x, y, z) = V(r) = \frac{1}{2}\, m\omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}\, m\omega^2 r^2 \ .$$

Polarkoordinatene (r, θ, φ) er definert ved at

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \ , \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi \ , \qquad z = r\cos\theta \ .$$

Hamilton-operatoren for partikkelen er

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\, \nabla^2 + V \ .$$

a) Den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen

$$H\psi = E\psi \tag{2}$$

har et fullstendig sett av løsninger på formen

$$\psi(\vec{r}) = \psi(x, y, z) = f(x)\, g(y)\, h(z) \ . \tag{3}$$

Hvilke ligninger må funksjonene $f(x)$, $g(y)$ og $h(z)$ oppfylle?

Hva er sammenhengen mellom energinivåene til en harmonisk oscillator i en dimensjon og i tre dimensjoner?

b) Finn energien E for grunntilstanden og for første eksiterte tilstand.

Er noen av de to laveste energinivåene degenererte?

I så fall, hva er degenerasjonen (hvor mange tilstander er det som har samme energi)?

c) Den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen (2) kan løses ved separasjon av variable også når vi bruker polarkoordinatene r, θ, φ. Da skriver vi

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \ .$$

Her er $Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)$ en sfærisk harmonisk funksjon, definert ved at

$$\vec{L}^{\,2}\, Y_{\ell m_\ell} = \ell(\ell + 1)\hbar^2\, Y_{\ell m_\ell} \ , \qquad L_z\, Y_{\ell m_\ell} = m_\ell\, \hbar\, Y_{\ell m_\ell} \ ,$$

der L_z er z-komponenten av dreieimpulsen,

$$L_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, \frac{\partial}{\partial\varphi} \ ,$$

mens $\vec{L}^{\,2}$ er lengden i kvadrat av dreieimpulsen,

$$\vec{L}^{\,2} = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\, \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\, \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) .$$

Hvilke verdier kan kvantetallene ℓ og m_ℓ ha?

d) Radialfunksjonen $R(r)$ må oppfylle ligningen

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)+\frac{1}{2}\,m\omega^2 r^2\right\}R(r)=E\,R(r)\;.$$

Vis at når du velger passende verdier for konstantene β og γ, så er

$$R(r)=R_0(r)=\mathrm{e}^{-\beta r^2}$$

en løsning for $\ell=0$, mens

$$R(r)=R_1(r)=r\,\mathrm{e}^{-\gamma r^2}$$

er en løsning for $\ell=1$.

Finn de tilsvarende energiene E_0 og E_1.

e) De sfærisk harmoniske funksjonene med $\ell=0$ og $\ell=1$ er

$$\begin{aligned}
Y_{00}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\;,\\
Y_{11}(\theta,\varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\;,\\
Y_{10}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta\;,\\
Y_{1,-1}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\;.
\end{aligned}$$

Kan noen av de fire bølgefunksjonene

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \mathrm{e}^{-\beta r^2}\,Y_{00}(\theta,\varphi)\;,\\
\psi_1 &= r\,\mathrm{e}^{-\gamma r^2}\,Y_{11}(\theta,\varphi)\;,\\
\psi_2 &= r\,\mathrm{e}^{-\gamma r^2}\,Y_{10}(\theta,\varphi)\;,\\
\psi_3 &= r\,\mathrm{e}^{-\gamma r^2}\,Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\;.
\end{aligned}$$

faktoriseres som i ligning (3)?

Hvis noen av dem ikke kan faktoriseres, kan du lage lineærkombinasjoner av dem slik at du får nye bølgefunksjoner som kan faktoriseres?