Løsning til øving 1 for FY1004, høsten 2007

1. (Oppgave 4 fra læreboka Modern Physics, 3. utgave):

   a) Bruk Stefan–Boltzmanns lov (kalt Stefans lov i boka) til å regne ut total utstrålt effekt pr. areal for en tråd av wolfram som har en temperatur på 3000 K. Vi antar altså at tråden stråler som et svart legeme.

   Svar:

$$e_{\text{total}} = \sigma T^4 = 5{,}67\ 10^{-8}\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-4}\ (3000\ \text{K})^4 = 4{,}59\ 10^6\ \text{W m}^{-2}\ .$$

   b) Hvis denne tråden er glødetråd i en 60 W lyspære, hvor stort overflateareal har den?

   Arealet er

$$A = \frac{60\ \text{W}}{4{,}59\ 10^6\ \text{W m}^{-2}} = 1{,}307\ 10^{-5}\ \text{m}^2 = 13{,}07\ \text{mm}^2\ .$$

2. (Delvis oppgave 5 fra boka):
   Plancks strålingslov skrives i boka på to forskjellige måter.
   Energitettheten av stråling med bølgelengde mellom λ og $\lambda + \mathrm{d}\lambda$ er

$$u(\lambda, T)\ \mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1\right)}\ \mathrm{d}\lambda\ .$$

   Energitettheten av stråling med frekvens mellom f og $f + \mathrm{d}f$ er

$$u(f, T)\ \mathrm{d}f = \frac{8\pi h f^3}{c^3 \left(\mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} - 1\right)}\ \mathrm{d}f\ .$$

   a) Vis at dette er den samme loven, bare skrevet på to forskjellige måter.
   Hint: Relasjonen $\lambda = c/f$ gir også en sammenheng mellom $\mathrm{d}\lambda$ og $\mathrm{d}f$.

   Vi kan karakterisere *den samme* elektromagnetiske strålingen ved å angi enten bølgelengden λ eller frekvensen f, og da er

$$f = \frac{c}{\lambda}\ , \qquad \lambda = \frac{c}{f}\ .$$

   Hvis vi spesifiserer et infinitesimalt bølgelengdeintervall fra λ til $\lambda + \mathrm{d}\lambda$, som svarer til et infinitesimalt frekvensintervall fra f til $f + \mathrm{d}f$, så har vi den samme energitettheten (energi pr. volum)

$$u(\lambda, T)\ \mathrm{d}\lambda = u(f, T)\ \mathrm{d}f\ .$$

   Dermed kan vi utlede den ene formen av loven fra den andre, for eksempel versjon nr. en fra versjon nr. to,

$$u(f, T)\ \mathrm{d}f = \frac{8\pi h f^3}{c^3 \left(\mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} - 1\right)}\ \mathrm{d}f\ ,$$

   der vi setter inn

$$f = \frac{c}{\lambda}\ , \qquad \mathrm{d}f = -\frac{c}{\lambda^2}\ \mathrm{d}\lambda\ .$$

Vi ser bort fra minustegnet i den siste formelen, fordi energitettheten pr. definisjon er positiv. Det gir at

$$u(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda = u(f,T)\,\mathrm{d}f = \frac{8\pi hf^3}{c^3\left(\mathrm{e}^{\frac{hf}{k_BT}}-1\right)}\,\mathrm{d}f = \frac{8\pi hc^3}{\lambda^3c^3\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1\right)}\,\frac{c}{\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda$$
$$= \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1\right)}\,\mathrm{d}\lambda\,,$$

som er versjon nr. en av loven. Denne utledningen kan vi lese baklengs, om vi vil, det vil si at vi går fra versjon en til versjon to, og det viser at de to versjonene er ekvivalente.

b) Vi definerer $\lambda_{\max}$ som den bølgelengden der strålingsintensiteten $u(\lambda,T)$ er størst. Utled Wiens forskyvningslov:

$$\lambda_{\max} = \frac{C_1}{T}\,,$$

der C_1 er en konstant. Finn en numerisk verdi for C_1 (bruk kalkulator, om nødvendig).

Hint: For å finne maksimum av $u(\lambda,T)$ kan du derivere med hensyn på λ og sette den deriverte lik null. For å finne en numerisk løsning av ligningen kan du for eksempel innføre den dimensjonsløse variabelen

$$x = \frac{hc}{\lambda k_BT}\,.$$

Med

$$u(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1\right)}$$

har vi at

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\,u(\lambda,T) = 8\pi hc\left[-\frac{5}{\lambda^6\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1\right)} - \frac{1}{\lambda^5\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1\right)^2}\,\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}\left(-\frac{hc}{\lambda^2k_BT}\right)\right]$$
$$= \frac{8\pi hc}{\lambda^6\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1\right)^2}\left[-5\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1\right)+\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}\,\frac{hc}{\lambda k_BT}\right]\,.$$

Den verdien av λ som maksimerer funksjonen $u(\lambda,T)$ for en gitt temperatur T, er bestemt av ligningen $\partial u/\partial\lambda = 0$, som vi bare kan oppfylle ved å sette

$$-5\left(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1\right)+\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}\,\frac{hc}{\lambda k_BT} = 0\,.$$

Når vi setter $x = hc/(\lambda k_BT)$, gir det ligningen

$$-5\left(\mathrm{e}^x-1\right)+x\,\mathrm{e}^x = 0\,.$$

Løsningen, $x = x_{\max}$, må vi finne numerisk. Men allerede før vi kjenner den numeriske verdien av $x_{\max}$, vet vi at $x_{\max} = hc/(\lambda_{\max}k_BT)$, som betyr at

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{x_{\max}k_BT} = \frac{C_1}{T}\,,$$

der C_1 er en konstant, $C_1 = hc/(x_{\max} k_B)$.

En metode for å løse ligningen, er Newtons metode for en generell ligning $F(x) = 0$. Gitt en tilnærmet løsning $x = x_0$, rekkeutvikler vi

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2!}\,F''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,F^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n + \cdots \ ,$$

og løser den tilnærmede ligningen

$$F(x_0) + F'(x_0)\,(x - x_0) = 0 \ ,$$

for x, det gir

$$x = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \ .$$

Siden x (forhåpentlig) er en bedre tilnærming enn x_0, setter vi $x_0 = x$ og itererer (regner ut en ny verdi for x), inntil vi har et svar som er så nøyaktig som vi ønsker. I vårt tilfelle, med $F(x) = 5 + (x - 5)\,\mathrm{e}^x$, får vi iterasjonsformelen

$$x = x_0 - \frac{5 + (x_0 - 5)\,\mathrm{e}^{x_0}}{(x_0 - 4)\,\mathrm{e}^{x_0}} \ .$$

Hvis vi starter med en fornuftig verdi for x_0, f.eks. $x_0 = 5$, finner vi fort løsningen $x = x_{\max} = 4{,}965114$.

I dette tilfellet finnes det imidlertid et knep som gir en enda enklere numerisk metode. Ligningen vi skal løse, kan nemlig skrives slik:

$$x = 5\,(1 - \mathrm{e}^{-x}) \ .$$

Da ser vi straks (?) at $x = 5$ er en tilnærmet løsning. Setter vi $x = 5$ inn i høyre side av ligningen, får vi direkte en ny verdi av x, som vi kan sette inn i høyresiden for å få en enda bedre verdi. Og så videre. Vi ender opp med den samme løsningen $x_{\max} = 4{,}965114$.

I alle fall finner vi at

$$\lambda_{\max} = \frac{C_1}{T} \ ,$$

der C_1 er en konstant,

$$C_1 = \frac{hc}{x_{\max} k_B} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s} \times 2{,}998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{4{,}965114 \times 1{,}381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}} = 2{,}897\ 10^{-3}\ \mathrm{m\ K} \ .$$

Svart stråling med temperatur 1 K har maksimum intensitet ved en bølgelengde på 2,9 mm, som er svært kortbølget radiostråling.

Verdensrommet er fylt av en såkalt kosmisk bakgrunnstråling som er svart stråling med temperatur $T = 2{,}73$ K, og den har altså intensitetsmaksimum ved en bølgelengde nokså nøyaktig lik 1 mm.

c) Vi kan også definere $f_{\max}$ som den frekvensen der strålingsintensiteten $u(f,T)$ er størst. Vis at

$$f_{\max} = C_2 T \ .$$

der C_2 er en annen konstant. Finn også en numerisk verdi for C_2.

Oppgaven nå er å maksimalisere

$$u(f,T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3 \left(\mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)}$$

som funksjon av f. Da må vi regne ut den deriverte

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f} u(f,T) &= \frac{8\pi h}{c^3} \left[\frac{3f^2}{\mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} - \frac{f^3}{\left(\mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)^2} \mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} \frac{h}{k_B T} \right] \\ &= \frac{8\pi h f^2}{c^3 \left(\mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)^2} \left[3 \left(\mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right) - \mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} \frac{hf}{k_B T} \right] \ . \end{aligned}$$

Vi må løse ligningen $\partial u / \partial f = 0$, og den oppfyller vi ved å sette

$$3 \left(\mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right) - \mathrm{e}^{\frac{hf}{k_B T}} \frac{hf}{k_B T} = 0 \ .$$

Med $x = hf/(k_B T)$ gir det ligningen

$$3 \left(\mathrm{e}^x - 1 \right) - x \, \mathrm{e}^x = 0 \ .$$

Det er samme ligning som før, bare med 3 istedenfor 5. Løsningen er litt mindre enn 3, mer nøyaktig $x'_{\max} = 2{,}821439$. Siden $x'_{\max} = hf_{\max}/(k_B T)$, betyr det at

$$f_{\max} = \frac{x'_{\max} \, k_B T}{h} = C_2 T \ ,$$

med

$$C_2 = \frac{x'_{\max} \, k_B}{h} = \frac{2{,}821439 \times 1{,}381 \times 10^{-23} \ \mathrm{J/K}}{6{,}626 \times 10^{-34} \ \mathrm{J\ s}} = 5{,}880 \ 10^{10} \ \mathrm{s}^{-1} \ \mathrm{K}^{-1} \ .$$

d) Frekvensen $f_{\max}$ tilsvarer en bølgelengde

$$\lambda'_{\max} = \frac{c}{f_{\max}} \ .$$

Er $\lambda'_{\max} = \lambda_{\max}$? Kommentar?

Vi har at

$$\lambda'_{\max} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{hc}{x'_{\max} \, k_B T} = \frac{x_{\max}}{x'_{\max}} \frac{hc}{x_{\max} \, k_B T} = \frac{x_{\max}}{x'_{\max}} \lambda_{\max} = 1{,}760 \ \lambda_{\max} \ .$$

Vi får altså et annet svar når vi spør etter den *bølgelengden* der energitettheten pr. *bølgelengdeintervall* er maksimal, enn vi får når vi spør etter den *frekvensen* der energitettheten pr. *frekvensintervall* er maksimal. Forklaringen er at transformasjonen fra bølgelengde til frekvens, $f = c/\lambda$, strekker ut den enden av skalaen der $\lambda \to 0$ og $f \to \infty$, og klemmer sammen den enden av skalaen der $\lambda \to \infty$ og $f \to 0$. En sammenligning mellom energitetthet pr. bølgelengde og energitetthet pr. frekvens avhenger derfor av hvor kortbølget (og høyfrekvent) eller langbølget (og lavfrekvent) strålingen er.

3. (Oppgave 6 fra boka):

Regn ut numeriske verdier for Planck-lengden $L_P = \sqrt{hG/c^3}$, Planck-tiden $t_P = \sqrt{hG/c^5}$ og Planck-massen $M_P = \sqrt{hc/G}$, der h er Plancks konstant, c er lyshastigheten og G er Newtons gravitasjonskonstant.

Som det står i oppgaveteksten i boka: har du lyst til å spekulere om den fysiske betydningen av disse tre størrelsene?

Planck-lengden:

$$\begin{aligned} L_P &= \sqrt{\frac{hG}{c^3}} = \sqrt{\frac{6{,}626\ 10^{-34}\ \mathrm{J\ s}\ \ 6{,}673\ 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}}{(2{,}998\ 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}})^3}} \\ &= \sqrt{1{,}641\ 10^{-69}\ (\mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}\ s})\ (\mathrm{kg\ m\ s^{-2}\ m^2\ kg^{-2}})\ (\mathrm{m^{-3}\ s^3})} \\ &= \sqrt{16{,}41\ 10^{-70}\ \mathrm{m^2}} = 4{,}051\ 10^{-35}\ \mathrm{m}\ . \end{aligned}$$

Planck-tiden:

$$t_P = \sqrt{\frac{hG}{c^5}} = \frac{L_P}{c} = \frac{4{,}051\ 10^{-35}\ \mathrm{m}}{2{,}998\ 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}} = 1{,}351\ 10^{-43}\ \mathrm{s}\ .$$

Planck-massen:

$$\begin{aligned} M_P &= \sqrt{\frac{hc}{G}} = \sqrt{\frac{6{,}626\ 10^{-34}\ \mathrm{J\ s}\ \ 2{,}998\ 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}}{6{,}673\ 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}}} \\ &= \sqrt{2{,}977\ 10^{-15}\ (\mathrm{kg\ m^2\ s^{-2}\ s})\ (\mathrm{m\ s^{-1}})\ (\mathrm{kg^{-1}\ m^{-1}\ s^2\ m^{-2}\ kg^2})} \\ &= \sqrt{29{,}77\ 10^{-16}\ \mathrm{kg^2}} = 5{,}456\ 10^{-8}\ \mathrm{kg}\ . \end{aligned}$$

All erfaring så langt, både i dagliglivet og i eksperimentalfysikken, tyder på at rom og tid er kontinuerlige: vi har foreløpig ikke sett noen nedre grense for hvor små avstander og korte tidsintervall det er mulig å måle. Men hvis vi noen gang kommer ned på en lengdeskala av størrelsesorden Planck-lengden, eller en tidsskala av størrelsesorden Planck-tiden, må vi regne med å finne fysiske lover som er vesentlig forskjellige fra dem vi kjenner i dag. Spesielt må vi vente å se kvanteeffekter som har med gravitasjon å gjøre. Foreløpig har vi ingen kvanteteori for gravitasjon, og vi har også mange størelsesordener å gå på før vi kommer ned på så små lengde- og tidsskalaer.

Elektroner, kvarker og andre fundamentale partikler oppfører seg som punktpartikler i alle de eksperimentene vi er i stand til å gjøre. Partikler med masse større enn Planck-massen kan ikke være punktpartikler, i hvert fall ikke uten at kvantegravitasjon spiller en vesentlig rolle for hvordan de oppfører seg.