Løsning til øving 2 for FY1004, høsten 2007

Kepler-problemet (I)

a) Skriv ut eksplisitte uttrykk for de tre komponentene L_x, L_y og L_z til dreieimpulsen $\vec{L}$.
(Hvis du tviler på at $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ og $\vec{p} \cdot \vec{L} = 0$, så sjekk ved eksplisitt utregning at det stemmer!)

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = (x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z) \times (p_x\,\vec{e}_x + p_y\,\vec{e}_y + p_z\,\vec{e}_z) \\
&= \quad xp_x\,\vec{e}_x \times \vec{e}_x + xp_y\,\vec{e}_x \times \vec{e}_y + xp_z\,\vec{e}_x \times \vec{e}_z \\
&\quad +yp_x\,\vec{e}_y \times \vec{e}_x + yp_y\,\vec{e}_y \times \vec{e}_y + yp_z\,\vec{e}_y \times \vec{e}_z \\
&\quad +zp_x\,\vec{e}_z \times \vec{e}_x + zp_y\,\vec{e}_z \times \vec{e}_y + zp_z\,\vec{e}_z \times \vec{e}_z \\
&= (yp_z - zp_y)\,\vec{e}_x + (zp_x - xp_z)\,\vec{e}_y + (xp_y - yp_x)\,\vec{e}_z \ .
\end{aligned}$$

Altså er $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$ og $L_z = xp_y - yp_x$.

At (for eksempel) $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0$, kan vises ved direkte utregning:

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = xL_x + yL_y + zL_z = x(yp_z - zp_y) + y(zp_x - xp_z) + z(xp_y - yp_x) = 0 \ .$$

Eller vi kan bruke generelle regneregler, nemlig den sykliske symmetrien til trippelproduktet:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \ ,$$

og antisymmetrien til kryssproduktet:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \ ,$$

som impliserer at $\vec{A} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{A}$, og dermed $\vec{A} \times \vec{A} = 0$. Vi får at

$$\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{p} \cdot (\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{p} \cdot 0 = 0 \ .$$

b) Vis at $\vec{L}$ er en bevegelseskonstant i Kepler-problemet, det vil si at alle komponentene L_x, L_y og L_z er bevegelseskonstanter.

Hint: Vis at den tidsderiverte $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$ er lik null.

Vi bruker den vanlige produktregelen for derivasjon av vektorproduktet $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, og får at

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \left(\frac{k}{r^3}\,\vec{r}\right) = m(\vec{v} \times \vec{v}) + \frac{k}{r^3}\,(\vec{r} \times \vec{r}) = 0 \ .$$

Dette regnestykket viser forøvrig at $\vec{L}$ er en bevegelseskonstant for et vilkårlig radielt kraftfelt, altså et kraftfelt der kraften $\vec{K}$ alltid er radiell (rettet langs $\vec{r}$), uavhengig av hvordan $|\vec{K}|$ varierer med avstanden.

c) Vis at $\vec{e}_r$ og $\vec{e}_\varphi$ er ortogonale, og at $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$ (husk at $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \vec{e}_z$).

Ortogonaliteten:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi &= (\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y) \cdot (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y) \\
&= (\cos\varphi\,\vec{e}_x) \cdot (-\sin\varphi\,\vec{e}_x) + (\cos\varphi\,\vec{e}_x) \cdot (\cos\varphi\,\vec{e}_y) \\
&\quad +(\sin\varphi\,\vec{e}_y) \cdot (-\sin\varphi\,\vec{e}_x) + (\sin\varphi\,\vec{e}_y) \cdot (\cos\varphi\,\vec{e}_y) \\
&= -\cos\varphi\sin\varphi + 0 + 0 + \sin\varphi\cos\varphi = 0 \ .
\end{aligned}$$

Vektorproduktet:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi &= (\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y) \times (-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y) \\
&= \quad (\cos\varphi\,\vec{e}_x) \times (-\sin\varphi\,\vec{e}_x) + (\cos\varphi\,\vec{e}_x) \times (\cos\varphi\,\vec{e}_y) \\
&\quad + (\sin\varphi\,\vec{e}_y) \times (-\sin\varphi\,\vec{e}_x) + (\sin\varphi\,\vec{e}_y) \times (\cos\varphi\,\vec{e}_y) \\
&= 0 + \cos^2\!\varphi\,\vec{e}_z - \sin^2\!\varphi\,(-\vec{e}_z) + 0 = \vec{e}_z\ .
\end{aligned}$$

d) Vis at

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi\ ,$$

og at

$$L_z = mr^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\ .$$

Den siste ligningen er spesielt nyttig fordi vi allerede vet at L_z er konstant.

Vi bruker igjen produktregelen for derivasjon til å tidsderivere $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$. Vi får at

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi\ .$$

Videre har vi at

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times (m\vec{v}) = mr\,\vec{e}_r \times \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi\right) \\
&= mr\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,(\vec{e}_r \times \vec{e}_r) + r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,(\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi)\right) = mr^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

Helt generelt kan vi dekomponere en vektor $\vec{A}$ enten etter de ortogonale enhetsvektorene $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ og $\vec{e}_z$ eller etter de ortogonale enhetsvektorene $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ og $\vec{e}_z$, slik:

$$\vec{A} = A_x\,\vec{e}_x + A_y\,\vec{e}_y + A_z\,\vec{e}_z = A_r\,\vec{e}_r + A_\varphi\,\vec{e}_\varphi + A_z\,\vec{e}_z\ .$$

Vi ser altså at $L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_r = 0$, $L_\varphi = 0$ og

$$L_z = mr^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\ .$$

e) Vis at

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L_z^2}{m^2r^2}\ .$$

Fordi $\vec{e}_r$ og $\vec{e}_\varphi$ er ortogonale enhetsvektorer, følger det direkte av ligningen

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi\ ,$$

sammen med ligningen $L_z = mr^2\,\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$, at

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L_z^2}{m^2r^2}\ .$$