Løsning til øving 3 for FY1004, høsten 2007

Kepler-problemet (II)

a) Bruk bevegelsesloven

$$m\vec{a} = \frac{k}{r^3}\,\vec{r}$$

til å vise at den totale energien, definert som kinetisk energi pluss potensiell energi:

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{k}{r}\ ,$$

er konstant.

Hint: Vis at $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Tidsderivasjon av ligningene $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$ og $r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r}$ gir at

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{v}\cdot\vec{a} \qquad \text{og} \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{r}\ .$$

Tidsderivasjon av ligningen $r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r}$ gir at

$$2r\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\vec{v} = 2\vec{r}\cdot\vec{v}\ .$$

På samme måte får vi at

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{v}\cdot\vec{a}\ .$$

Følgelig er

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,m\,\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} - \frac{k}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = m\vec{v}\cdot\vec{a} - \frac{k}{r^3}\,\vec{r}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\left(m\vec{a} - \frac{k}{r^3}\,\vec{r}\right) = \vec{v}\cdot 0 = 0\ .$$

b) Ligningen fra oppgave 2e),

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{{L_z}^2}{m^2r^2}\ ,$$

der L_z er konstant, gir følgende uttrykk for energien,

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{{L_z}^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}\ .$$

For å løse Kepler-problemet bruker vi nå enda to knep. For det første ser vi på r som en funksjon av vinkelen φ istedenfor som en funksjon av t, det gir at

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{L_z}{mr^2}\ .$$

Dernest innfører vi en ny variabel $u = 1/r$.

Vis at

$$E = \frac{{L_z}^2}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2\right] + ku\ .$$

Deriver denne ligningen med hensyn på φ, husk at E er konstant, og utled dermed bevegelsesligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u + \frac{km}{{L_z}^2} = 0\ .$$

Definisjonen $u = 1/r$ impliserer at

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\ ,$$

og videre at

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{L_z}{mr^2} = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{L_z}{m}\ .$$

Innsatt i uttrykket for E gir det at

$$E = \frac{m}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{L_z}{m}\right)^2 + \frac{L_z^{\,2}u^2}{2m} + ku = \frac{L_z^{\,2}}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2\right] + ku\ .$$

Som skulle vises. Vi vet at E er konstant, og derivasjon med hensyn på φ gir dermed at

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{L_z^{\,2}}{2m}\left[2\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + 2u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right] + k\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{L_z^{\,2}}{m}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\left[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u + \frac{km}{L_z^{\,2}}\right].$$

Hvis $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi \neq 0$, så impliserer denne ligningen at

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u + \frac{km}{L_z^{\,2}} = 0\ . \tag{1}$$

Ligning (1) skal gjelde også når $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi = 0$, dvs. når u og r er konstante, slik at banen er en sirkel. Men for å vise det, må vi resonnere litt grundigere. Vi kan resonnere med kontinuitet: løsninger med $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi \neq 0$ og ligning (1) oppfylt må gå kontinuerlig over i løsninger med $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi = 0$ og fremdeles ligning (1) oppfylt. Eller vi kan regne mer direkte over fra den andreordens bevegelsesligningen (Newtons 2. lov)

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{k}{r^3}\,\vec{r}$$

og til den andreordens ligningen (1). Det regnestykket går vi ikke nærmere inn på her.

c) Etter at vi har omskrevet bevegelsesligningen så mye som dette, kan den løses enkelt. Den generelle løsningen er

$$u = u_0\,[1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)] \qquad \text{med} \qquad u_0 = -\frac{km}{L_z^{\,2}}\ ,$$

som inneholder to integrasjonskonstanter ϵ og φ_0 (to konstanter fordi ligningen er en andre-ordens ordinær differensialligning). Konstanten ϵ kalles eksentrisitet, og vi kan alltid velge $\epsilon \geq 0$ (løsningen er uforandret om vi bytter fortegn på ϵ samtidig som vi øker φ_0 med π). Den samme løsningen kan også skrives slik:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\,[1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)] \qquad \text{med} \qquad r_0 = \frac{1}{u_0} = -\frac{L_z^{\,2}}{km}\ .$$

Vis at energien for denne banen er

$$E = \frac{k^2m(\epsilon^2 - 1)}{2L_z^{\,2}}\ .$$

Vi ser at $E < 0$ for $\epsilon < 1$, $E = 0$ for $\epsilon = 1$ og $E > 0$ for $\epsilon > 1$.

Innsetting av $u = u_0\,[1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)]$ med $u_0 = -km/L_z^2$ gir at

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{L_z^2}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2\right] + ku \\
&= \frac{L_z^2 u_0^2}{2m}\left[\epsilon^2\sin^2(\varphi-\varphi_0) + 1 + 2\epsilon\cos(\varphi-\varphi_0) + \epsilon^2\cos^2(\varphi-\varphi_0)\right] \\
&\quad + ku_0(1 + \epsilon\cos(\varphi-\varphi_0)) \\
&= \frac{k^2 m}{2L_z^2}\left[\epsilon^2 + 1 + 2\epsilon\cos(\varphi-\varphi_0) - 2 - 2\epsilon\cos(\varphi-\varphi_0)\right] \\
&= \frac{k^2 m(\epsilon^2-1)}{2L_z^2}\ .
\end{aligned}
$$

d) En α-partikkel spres mot en atomkjerne med ladning Ze som ligger i ro i origo.
α-partikkelen har en gitt energi $E > 0$ og en gitt absoluttverdi $L = |\vec{L}|$ av dreieimpulsen $\vec{L}$ (ovenfor har vi regnet på bevegelse i xy-planet, slik at $L = |L_z|$).
Hva blir spredningsvinkelen?

Spredningsvinkelen ϕ defineres slik at $\phi = 0$ hvis α-partikkelen ikke forandrer retning.

Det tillatte området for vinkelen φ er, som sagt i oppgaveteksten, gitt ved ulikhetene

$$\varphi_0 + \pi - \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_0 + \pi + \varphi_1\ ,$$

der

$$\varphi_1 = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2EL_z^2}{k^2 m}}}\ .$$

Dessuten er $r = 1/u = \infty$ ved yttergrensene $\varphi = \varphi_0 + \pi \pm \varphi_1$.

For eksempel kan det hende at α-partikkelen kommer fra $r = \infty$ med en vinkel

$$\varphi = \varphi(t = -\infty) = \varphi_0 + \pi - \varphi_1\ ,$$

at den så spres mot atomkjernen og går ut igjen mot $r = \infty$ med en vinkel

$$\varphi = \varphi(t = +\infty) = \varphi_0 + \pi + \varphi_1 = \varphi(t = -\infty) + 2\varphi_1\ .$$

Vinkelen φ øker altså med $2\varphi_1$ i løpet av spredningsprosessen.

Spredningsvinkelen er da, pr. definisjon,

$$\phi = \pi - 2\varphi_1\ .$$

Selv om det ikke var spørsmål om det, kan vi nå regne ut Rutherford-tverrsnittet. Ved $r = \infty$ har α-partikkelen en hastighet som vi kaller v_∞, gitt ved energien E, i følge formelen

$$E = \frac{1}{2}\,mv_\infty^2\ ,$$

altså,

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{m}}\ .$$

Vi definerer en størrelse b som vi kaller støtparameter, definert ved at

$$L = |\vec{L}| = |L_z| = bmv_\infty \ ,$$

altså,

$$b = \frac{L}{mv_\infty} = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \ .$$

Støtparameteren er den minste avstanden som α-partikkelen ville passere fra atomkjernen dersom den gikk rett framover uten å bli avbøyd. For en gitt energi E er spredningsvinkelen ϕ bestemt av en eneste variabel, nemlig dreieimpulsen L, eller ekvivalent, støtparameteren b, i følge formelen

$$\phi = \pi - 2\varphi_1 = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{k^2 m}}} = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{4E^2 b^2}{k^2}}} \ .$$

Vi kan omskrive denne formelen slik:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{4E^2 b^2}{k^2}}} = \cos\left(\frac{\pi - \phi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) .$$

Videre, ved kvadrering,

$$\frac{1}{1 + \dfrac{4E^2 b^2}{k^2}} = \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \ ,$$

og enda videre,

$$\frac{4E^2 b^2}{k^2} = \frac{1}{\sin^2(\phi/2)} - 1 = \frac{\cos^2(\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)} \ ,$$

og til slutt,

$$b = \frac{k}{2E} \ \mathrm{cotg}\left(\frac{\phi}{2}\right) .$$

Vi tenker oss et infinitesimalt støtparameterintervall fra b til $b + \mathrm{d}b$, det representerer et infinitesimalt areal

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b \ \mathrm{d}b = 2\pi \ \frac{k}{2E} \ \mathrm{cotg}\left(\frac{\phi}{2}\right) \frac{k}{2E} \ \frac{1}{\sin^2(\phi/2)} \ \frac{\mathrm{d}\phi}{2} = \frac{\pi k^2 \cos(\phi/2)}{4E^2 \sin^3(\phi/2)} \ \mathrm{d}\phi \ .$$

Dette arealet kaller vi et tverrsnitt, det er ganske enkelt den blinken vi skyter på for å treffe innenfor støtparameterintervallet b til $b + \mathrm{d}b$.

Et spredningsvinkelintervall fra ϕ til $\phi + \mathrm{d}\phi$ gir en infinitesimal romvinkel

$$\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\phi \ \mathrm{d}\phi = 4\pi \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \mathrm{d}\phi \ .$$

Det differensielle spredningstverrsnittet, som interesserer oss, er

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi \sin(\phi/2)\cos(\phi/2) \ \mathrm{d}\phi} = \frac{k^2}{16E^2 \sin^4(\phi/2)} \ .$$

Dette er Rutherfords formel, som han verifiserte eksperimentelt.