Løsning til øving 5 for FY1004, høsten 2007

a) Nedenfor antar vi at A er en 2×2-matrise,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Hvilke betingelser må matriseelementene a, b, c og d oppfylle for at A skal være hermitesk?

Betingelsene er at diagonalelementene a og d er reelle, $a^* = a$ og $d^* = d$, og at $b^* = c$.

b) Skriv opp egenverdiligningen til A, som er en andregradsligning, og løs den.

Vis at begge egenverdiene er reelle dersom A er hermitesk.

Unnskyld en smule forvirring i terminologien i spørsmålstillingen. Egenverdiligningen til A er ligningen $Au = \lambda u$, der u er en egenvektor (en 2×1-matrise) og λ en egenverdi (et kompleks tall). Egenverdiligningen kan også skrives som

$$(A - \lambda I)\, u = 0 \,,$$

der I er identitetsmatrisen. For at det skal finnes en løsning for u som ikke er identisk lik null, må matrisen $A - \lambda I$ ha determinant lik null:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \,.$$

Dette er *den karakteristiske ligningen* til A. Den bestemmer egenverdiene, og derfor kan den også kalles egenverdiligningen, når vi uttrykker oss litt mindre presist. Den karakteristiske ligningen til 2×2-matrisen A kan skrives slik:

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} A + \det A = 0 \,,$$

Sporet eller *trasen*, forkortet Tr, er summen av diagonalelementene i en kvadratisk matrise. Egenverdiene til 2×2-matrisen A er

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2} \,.$$

Når A er hermitesk, er a og d reelle, og $c = b^*$, følgelig

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4\,|b|^2}}{2} \,.$$

Fordi uttrykket under rottegnet her er ikke-negativt, er egenverdiene reelle.

c) Som et mer konkret eksempel, la heretter

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 + 2\mathrm{i} \\ 1 - 2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} .$$

Er A hermitesk?

Ja, i følge punkt a).

d) Finn de to egenverdiene λ_1 og λ_2, og de tilhørende egenvektorene

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}, \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}.$$

En gitt egenvektor kan alltid *normeres* forskjellig ved at den multipliseres med en kompleks konstant. Velg normeringen av ψ_1 og ψ_2 slik at

$$\psi_1^\dagger \psi_1 = |u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 = 1 \ , \qquad \psi_2^\dagger \psi_2 = |u_{21}|^2 + |u_{22}|^2 = 1 \ .$$

Den karakteristiske ligningen,

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 1)^2 - 9 = 0 \ ,$$

har røttene $\lambda_1 = 1 + 3 = 4$ og $\lambda_2 = 1 - 3 = -2$.
Egenverdiligningen $A\psi_1 = \lambda_1\psi_1$, eksplisitt skrevet ut, er:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1+2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}.$$

Dette er to ligninger:

$$\begin{aligned} -u_{11} + (1+2\mathrm{i})u_{12} \ &= \ 0 \ , \\ (1-2\mathrm{i})u_{11} - 5u_{12} \ &= \ 0 \ , \end{aligned}$$

som begge har løsningen

$$u_{11} = (1+2\mathrm{i}) \, u_{12} \ .$$

Normeringskravet

$$|u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 = 5\,|u_{12}|^2 + |u_{12}|^2 = 6\,|u_{12}|^2 = 1$$

har løsningen

$$u_{12} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\sqrt{6}} \ ,$$

med en vilkårlig reell fase α, vi velger $\alpha = 0$ (hvorfor ikke?). Det gir at

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tilsvarende finner vi at egenverdiligningen $A\psi_2 = \lambda_2\psi_2$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1+2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix},$$

har som løsning den normerte egenvektoren

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

e) Vis at egenvektorene er ortogonale, det vil si at $\psi_1^\dagger \psi_2 = 0$.

Bevis:

$$\psi_1^\dagger \psi_2 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} = 0 \; .$$

f) Matriseproduktene $\psi_1 \psi_1^\dagger$ og $\psi_2 \psi_2^\dagger$ er 2×2-matriser. Vis at de er hermiteske, og at

$$\psi_1 \psi_1^\dagger + \psi_2 \psi_2^\dagger = I \; ,$$

og at

$$\lambda_1 \, \psi_1 \psi_1^\dagger + \lambda_2 \, \psi_2 \psi_2^\dagger = A \; .$$

Vi har at

$$\psi_1 \psi_1^\dagger = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1+2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$\psi_2 \psi_2^\dagger = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ -1+2\mathrm{i} & 5 \end{pmatrix} .$$

Vi ser da direkte at

$$\psi_1 \psi_1^\dagger + \psi_2 \psi_2^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \; ,$$

og at

$$4 \, \psi_1 \psi_1^\dagger - 2 \, \psi_2 \psi_2^\dagger = \begin{pmatrix} 3 & 1+2\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} = A \; .$$