Løsning til øving 7 for FY1004, høsten 2007

Kapittel 4 (The Particle Nature of Matter), oppgave 18

Energinivåene i hydrogenatomet er

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

med $E_1 = -13{,}6$ eV. Overgangen fra nivået $n = 1$ til $n = 3$ skjer ved at det absorberes et foton med energi

$$\Delta E = E_3 - E_1 = E_1 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2}\right) = -\frac{8E_1}{9} = 12{,}1 \text{ eV}\,.$$

Når atomet etterpå faller tilbake til grunntilstanden, kan det skje ved en direkte overgang, der det sendes ut et foton med energi 12,1 eV. Eller det kan skje i to trinn, først med en overgang fra $n = 3$ til $n = 2$, med fotonenergi

$$\Delta E_a = E_3 - E_2 = E_1 \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2}\right) = -\frac{5E_1}{36} = 1{,}9 \text{ eV}\,,$$

fulgt av en overgang fra $n = 2$ til $n = 1$, med fotonenergi

$$\Delta E_b = E_2 - E_1 = E_1 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = -\frac{3E_1}{4} = 10{,}2 \text{ eV}\,.$$

Selvfølgelig er $\Delta E_a + \Delta E_b = \Delta E$.

Kapittel 4, oppgave 24

Et hydrogenatom i den eksiterte tilstanden med $n = 3$ faller tilbake til grunntilstanden, med $n = 1$, og sender ut et foton. Som vi nettopp regnet ut, har fotonet en energi $E_\gamma = 12{,}1$ eV. Det har da frekvens

$$f = \frac{E_\gamma}{h} = \frac{12{,}1 \text{ eV}}{6{,}626 \times 10^{-34} \text{ J s}} = \frac{12{,}1 \times 1{,}602 \times 10^{-19} \text{ C V}}{6{,}626 \times 10^{-34} \text{ J s}} = 2{,}93 \times 10^{15} \text{ Hz}\,,$$

og bølgelengde

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34} \text{ J s} \times 2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s}}{12{,}1 \times 1{,}602 \times 10^{-19} \text{ C V}} = 1{,}025 \times 10^{-7} \text{ m} = 102{,}5 \text{ nm} = 1025 \text{ Å}\,.$$

Impulsen til fotonet er

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{E_\gamma}{c} = 12{,}1 \text{ eV/c} = 12{,}1\,\frac{1{,}602 \times 10^{-19} \text{ C V}}{2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s}} = 6{,}47 \times 10^{-27} \text{ kg m/s}\,.$$

Elektronvolt dividert med lyshastigheten, eV/c, er en passende enhet for impuls i denne sammenhengen.

Hydrogenatomet lå i ro i start-tilstanden, og hadde da impuls lik null. Siden impulsen er bevart, må atomet og fotonet i slutt-tilstanden tilsammen ha impuls lik null. Altså har atomet fått en impuls p_γ i motsatt retning av fotonet. Hydrogenatomet, som har masse M omtrent lik massen til protonet,

$$M = 1{,}673 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 938{,}3\ \mathrm{MeV/c^2} = 9{,}383 \times 10^{8}\ \mathrm{eV/c^2}\ ,$$

har da en hastighet

$$v = \frac{p_\gamma}{M} = \frac{12{,}1\ \mathrm{eV/c}}{938{,}3\ \mathrm{MeV/c^2}} = 1{,}29 \times 10^{-8}\ c = \frac{6{,}47 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg\ m/s}}{1{,}673 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 3{,}87\ \mathrm{m/s}\ ,$$

omtrent tre ganger vanlig gangfart. Det har en kinetisk energi, såkalt rekylenergi, som er

$$E_k = \frac{1}{2}\,Mv^2 = \frac{p_\gamma^{\,2}}{2M} = \frac{(12{,}1\ \mathrm{eV/c})^2}{2 \times 938{,}3\ \mathrm{MeV/c^2}} = 7{,}80 \times 10^{-8}\ \mathrm{eV}\ .$$

Det eksakte energiregnskapet sier at

$$E_3 - E_1 = E_\gamma + E_k\ .$$

Rekylenergien til atomet, E_k, tas altså fra den energien som fotonet ellers kunne ha fått. Men vi ser også at rekylenergien er helt ubetydelig sammenlignet med den tilgjengelige energien $E_3 - E_1$. Det er derfor en svært god tilnærming, i hvert fall i denne sammenhengen, når vi regner at fotonenergien er $E_\gamma = E_3 - E_1$, uten at vi trekker fra rekylenergien til atomet.

Grunnen til at rekylenergien blir liten, er at massen til atomet er stor, i den forstand at hvileenergien $Mc^2 = 938{,}3$ MeV er stor sammenlignet med fotonenergien $E_\gamma = 12{,}1$ eV. Når atomet absorberer rekylimpulsen $p_\gamma = E_\gamma/c$, får det en kinetisk energi som er omvendt proporsjonal med atommassen,

$$E_k = \frac{p_\gamma^{\,2}}{2M} = \frac{E_\gamma^{\,2}}{2Mc^2} = E_\gamma\,\frac{E_\gamma}{2Mc^2} \ll E_\gamma\ .$$

Kapittel 4, oppgave 28, Auger-prosessen

Krom har atomnummer $Z = 24$. Energinivåene til de innerste elektronene (de som er nærmest atomkjernen) i et atom med atomnummer Z er, i følge Bohr-formelen,

$$E_n = -\frac{m_e}{2n^2}\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\right)^2 = -\frac{Z^2 m_e c^2}{2n^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)^2 = -\frac{Z^2\alpha^2}{2n^2}\,m_e c^2\ ,$$

der $n = 1, 2, 3, \ldots$, der $m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg er elektronmassen, og

$$m_e c^2 = 0{,}5110\ \mathrm{MeV}$$

er hvileenergien til elektronet, mens α er *finstrukturkonstanten*, et ubenevnt tall,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137{,}036}\ .$$

Når vi vet at grunntilstanden i hydrogenatomet har energi $-13{,}6$ eV, kan vi skrive, for $Z = 24$,

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2}\,13{,}6\ \mathrm{eV} = -\frac{1}{n^2}\,7{,}83\ \mathrm{keV}\ .$$

Når et elektron hopper fra nivået $n = 2$ til $n = 1$, gir det fra seg en energi

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) 7{,}83 \text{ keV} = 5{,}88 \text{ keV} .$$

Hvis det sparkes ut et elektron fra nivået $n = 4$, så har det opprinnelig en negativ energi E_4. Det kommer derfor ut av atomet med en kinetisk energi som er

$$E_2 - E_1 + E_4 = -\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{4^2}\right) 7{,}83 \text{ keV} = \frac{11}{16}\, 7{,}83 \text{ keV} = 5{,}39 \text{ keV} .$$

Da har vi sett bort fra rekylenergien til atomet, som er liten her (av samme grunn som at rekylenergien er liten når hydrogenatomet sender ut et foton).

En viktigere effekt enn rekylenergien til atomet, er antagelig at det elektronet som sparkes ut fra nivået $n = 4$, ikke ser den fulle kjerneladningen $Ze = 24e$. Det har nemlig noen elektroner innenfor seg, i baner nærmere kjernen, som delvis skjermer for kjerneladningen. Det betyr at dette elektronet er mindre tett bundet til atomet, og har en høyere energi enn den E_4 som vi regnet med her.

Kapittel 5 (Matter Waves), oppgave 10

Hydrogenatomet i grunntilstanden har en radius (omtrent) lik Bohr-radien $a_0 = 0{,}529$ Å. Et elektron (masse m_e) med de Broglie-bølgelengde lik diameteren $2a_0$ har impuls

$$p = \frac{h}{2a_0}$$

og kinetisk energi

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{8m_e a_0^2} = \frac{(6{,}626 \times 10^{-34} \text{ J s})^2}{8 \times 9{,}109 \times 10^{-31} \text{ kg} \times (0{,}529 \times 10^{-10} \text{ m})^2} \\ &= 2{,}153 \times 10^{-17} \text{ J} = 2{,}153 \times 10^{-17} \text{ J}\, \frac{\text{eV}}{1{,}602 \times 10^{-19} \text{ J}} = 134{,}4 \text{ eV} . \end{aligned}$$

Denne energien er ti ganger større enn (absoluttverdien av) grunntilstandsenergien til hydrogenatomet, 13,6 eV. Vi kommer mye nærmere det korrekte hvis vi antar at de Broglie-bølgelengden er lik omkretsen $2\pi a_0$ heller enn diameteren $2a_0$. Det reduserer energien med en faktor $\pi^2 = 9{,}87$. Vi har at

$$\frac{134{,}4 \text{ eV}}{\pi^2} = 13{,}6 \text{ eV (!!!!)}$$

Her har vi ett av de pussige tilfellene i fysikken der et omtrentlig regnestykke gir et eksakt svar!

Både i klassisk mekanikk og i kvantemekanikk finnes det et matematisk teorem som heter virialteoremet, som sier at når den potensielle energien er omvendt proporsjonal med avstanden, som tilfelle er i hydrogenatomet, og når systemet er i en bundet tilstand med negativ energi $E = -|E|$, så er forventningsverdien av den kinetiske energien eksakt lik $-E = |E|$, mens forventningsverdien av den potensielle energien er eksakt lik $2E = -2|E|$. I klassisk mekanikk finnes det ikke stasjonære tilstander i et slikt system, og det som da svarer til forventningsverdien, er middelverdien over et langt tidsintervall.

Kapittel 5, oppgave 11

Et elektron med de Broglie-bølgelengde $\lambda = 10^{-14}$ m har impuls $p = h/\lambda$ og kinetisk energi

$$\begin{aligned} E_k &= = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e\lambda^2} = \frac{(6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s})^2}{2 \times 9{,}109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg} \times (10^{-14}\ \mathrm{m})^2} \\ &= 2{,}41 \times 10^{-9}\ \mathrm{J} = 2{,}41 \times 10^{-9}\ \mathrm{J}\ \frac{\mathrm{eV}}{1{,}602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}} = 1{,}50 \times 10^{10}\ \mathrm{eV} = 1{,}50 \times 10^{4}\ \mathrm{MeV}\ . \end{aligned}$$

Her må vi be om unnskyldning for at vi prøver å regne ikke-relativistisk, det blir aldeles feil når vi finner at energien blir mye større enn hvileenergien til elektronet, som er $m_e c^2 = 0{,}511$ MeV. Vi må bruke den relativistiske formelen

$$E_k = \sqrt{(m_e c^2)^2 + p^2 c^2} - m_e c^2\ .$$

Her er

$$\begin{aligned} pc &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s} \times 2{,}998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}}{10^{-14}\ \mathrm{m}} = 1{,}986 \times 10^{-11}\ \mathrm{J} \\ &= 1{,}240 \times 10^{8}\ \mathrm{eV} = 124{,}0\ \mathrm{MeV}\ . \end{aligned}$$

Som gir en kinetisk energi

$$E_k = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2} - m_e c^2 \approx pc - m_e c^2 = 123{,}5\ \mathrm{MeV}\ .$$

Typiske energiforskjeller mellom energinivå i atomkjerner er noen få MeV. Derfor kan vi ikke vente å finne elektroner med kinetisk energi over 100 MeV i en atomkjerne.