Løsning til øving 8 for FY1004, høsten 2007

Vi tar for oss en partikkel med masse m i en endimensjonal boks med lengde L. For $0 < x < L$ gjelder den stasjonære Schrödingerligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi\ , \tag{1}$$

der E er energien. Bølgefunksjonen $\psi = \psi(x)$ skal oppfylle randkravene $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

Løsningene av Schrödingerligningen med randkrav er de stasjonære tilstandene (energiegentilstandene)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{for} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ , \tag{2}$$

med de tilhørende energiene

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m} = n^2 E_1\ . \tag{3}$$

a) Vis at energiegenfunksjonen ψ_n gitt i ligning (2) er korrekt normert, altså at

$$\int_0^L \mathrm{d}x\ |\psi_n(x)|^2 = 1\ .$$

Vis også at energiegenfunksjonene ψ_j og ψ_n med $j \neq n$ er *ortogonale*, det vil si at

$$\int_0^L \mathrm{d}x\ \psi_j^*\,\psi_n = \int_0^L \mathrm{d}x\ (\psi_j(x))^*\,\psi_n(x) = 0\ .$$

Hint: Du kan for eksempel bruke de trigonometriske identitetene

$$\cos(u \pm v) = \cos u\,\cos v \mp \sin u\,\sin v\ , \qquad \sin(u \pm v) = \sin u\,\cos v \pm \cos u\,\sin v\ ,$$

som gir, blant annet, at

$$\sin u\,\sin v = \frac{\cos(u-v) - \cos(u+v)}{2}\ .$$

Eller du kan bruke at

$$\cos u = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}}{2}\ , \qquad \sin u = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}}{2\mathrm{i}}\ ,$$

og omforme et produkt av trigonometriske funksjoner til en sum av komplekse eksponensialfunksjoner.

Normeringsintegralet (vi substituerer $u = x/L$):

$$\begin{aligned}
\int_0^L \mathrm{d}x\ |\psi_n(x)|^2 &= \int_0^L \mathrm{d}x\ \frac{2}{L}\ \sin^2\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 2\int_0^1 \mathrm{d}u\ \sin^2(n\pi u) \\
&= \frac{2}{(2\mathrm{i})^2}\int_0^1 \mathrm{d}u\ \left(\mathrm{e}^{in\pi u} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi u}\right)^2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}u\ \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\pi u} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2n\pi u}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\,(0 - 2 + 0) = 1\ .
\end{aligned}$$

En snarvei til svaret er det faktum at funksjonen $\sin^2$ oscillerer mellom 0 og 1, og middelverdien over en hel periode er $1/2$. Lengden av integrasjonsintervallet (med x som integrasjonsvariabel) er L, derfor blir integralet av $\sin^2$ lik $L/2$.

Ortogonalitet for $j \neq n$:

$$\begin{aligned}
\int_0^L \mathrm{d}x\ \psi_j^*\,\psi_n &= \int_0^L \mathrm{d}x\ \frac{2}{L}\ \sin\!\left(\frac{j\pi x}{L}\right)\sin\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 2\int_0^1 \mathrm{d}u\ \sin(j\pi u)\sin(n\pi u) \\
&= \frac{2}{(2\mathrm{i})^2}\int_0^1 \mathrm{d}u\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\pi u}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\pi u}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi u}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi u}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}u\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+n)\pi u}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-n)\pi u}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j-n)\pi u}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(j+n)\pi u}\right) = 0\ .
\end{aligned}$$

c) Den mest generelle tidsavhenginge bølgefunksjonen for partikkelen i boksen er

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\psi_n(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\ , \tag{4}$$

der

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar} = \frac{n^2\pi^2\hbar}{2m} = n^2\omega_1\ ,$$

og der koeffisientene $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ er komplekse tall som oppfyller normeringskravet

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1\ .$$

Vis at $\Psi(x,t)$ er normert til ethvert tidspunkt t, det vil si at

$$\int_0^L \mathrm{d}x\ |\Psi(x,t)|^2 = 1\ .$$

Vi må se nærmere på absoluttkvadratet av $\Psi(x,t)$:

$$\begin{aligned}
|\Psi(x,t)|^2 &= (\Psi(x,t))^*\,\Psi(x,t) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^*\,(\psi_j(x))^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_j t}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\psi_n(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_j^*\,a_n\,(\psi_j(x))^*\,\psi_n(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j-\omega_n)t}\ .
\end{aligned}$$

Generelt gjelder at et produkt av to summer blir en dobbeltsum,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_j A_j\right)\left(\sum_n B_n\right) &= \sum_n\left(\sum_j A_j\right)B_n = \sum_n\left(\sum_j A_jB_n\right) \\
&= \sum_n\sum_j A_jB_n = \sum_j\sum_n A_jB_n\ .
\end{aligned}$$

Som regel tar vi oss friheter når det gjelder å bytte om på rekkefølgen av to summasjonstegn.

I en endelig sum kan vi alltid bytte om på summasjonsrekkefølgen, vi får samme resultat enten vi summerer i den ene eller andre rekkefølgen.

I uendelige summer, derimot, hender det at denne regelen ikke gjelder. For eksempel er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

når vi summerer i den ≪naturlige≫ rekkefølgen

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots \,.$$

Summerer vi alle de positive leddene først, får vi

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots = +\infty - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots = +\infty \,.$$

Summerer vi alle de negative leddene først, får vi

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = -\infty + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = -\infty \,.$$

Og summerer vi i andre rekkefølger, kan vi få hva vi måtte ønske mellom $-\infty$ og $+\infty$.

Det matematiske teoremet som vi har bruk for, er at vi kan bytte fritt om på summasjonsrekkefølgen i en uendelig sum hvis den er *absolutt konvergent*, det vil si, hvis vi får en konvergent sum når vi tar absoluttverdien av hvert ledd i summen,

Tilsvarende regler gjelder for ombytting av integrasjonsrekkefølgen i et dobbeltintegral, eller for ombytting av rekkefølgen når vi både summerer og integrerer.

I vårt eksempel her har vi integralet av en dobbeltsum, og vi tar oss den friheten å bytte om slik at vi integrerer først og dobbeltsummerer etterpå. Ortogonaliteten av energiegenfunksjonene ψ_n reduserer dobeltsummen til en enkeltsum. Denne måten å regne på gir at

$$\begin{aligned}
\int_0^L \mathrm{d}x \; |\Psi(x,t)|^2 &= \int_0^L \mathrm{d}x \; \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_j^* \, a_n \, (\psi_j(x))^* \, \psi_n(x) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j - \omega_n)t} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_j^* \, a_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j - \omega_n)t} \int_0^L \mathrm{d}x \; (\psi_j(x))^* \, \psi_n(x) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} a_j^* \, a_j = 1 \,.
\end{aligned}$$

d) Anta at $a_3 = a_4 = \ldots = 0$ i lineærkombinasjonen (4), slik at

$$\Psi(x,t) = a_1 \, \psi_1(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t} + a_2 \, \psi_2(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t} \,,$$

med $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$. Beregn forventningsverdien av posisjonen x, definert som

$$\langle x \rangle = \int_0^L \mathrm{d}x \; x \; |\Psi(x,t)|^2 \,.$$

Beregn også forventningsverdien av x^2,

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^L \mathrm{d}x \; x^2 \; |\Psi(x,t)|^2 \,,$$

og variansen av x,

$$\mathrm{var}(x) = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \,.$$

For hvilke verdier av de komplekse koeffisientene a_1 og a_2 er forventningsverdien og variansen av x tidsuavhengige?

Forventningsverdien av x er

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \int_0^L \mathrm{d}x\; x\; |\Psi(x,t)|^2 = \int_0^L \mathrm{d}x\; x \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} a_j^*\, a_n\, (\psi_j(x))^*\, \psi_n(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j-\omega_n)t} \\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} a_j^*\, a_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j-\omega_n)t} \int_0^L \mathrm{d}x\; x\; \frac{2}{L}\; \sin\!\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} a_j^*\, a_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j-\omega_n)t}\; 2L \int_0^1 \mathrm{d}u\; u\; \sin(j\pi u)\; \sin(n\pi u) \\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} a_j^*\, a_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j-\omega_n)t}\; L \int_0^1 \mathrm{d}u\; u\; [\cos((j-n)\pi u) - \cos((j+n)\pi u)]\ .
\end{aligned}
$$

I tilfellet $j = n$ har vi at

$$
\int_0^1 \mathrm{d}u\; u\; \cos((j-n)\pi u) = \int_0^1 \mathrm{d}u\; u = \frac{1}{2}\ .
$$

Ellers får vi ved delvis integrasjon, for $k = j - n \neq 0$ eller $k = j + n > 0$, at

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}u\; u\; \cos(k\pi u) &= \left.\frac{u\,\sin(k\pi u)}{k\pi}\right|_{u=0}^{1} - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \mathrm{d}u\; \sin(k\pi u) = \left.\frac{\cos(k\pi u)}{(k\pi)^2}\right|_{u=0}^{1} \\
&= \frac{\cos(k\pi) - 1}{(k\pi)^2} = \frac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2}\ .
\end{aligned}
$$

For $j = n = 1$ og $j = n = 2$ gir det at

$$
\int_0^1 \mathrm{d}u\; u\; [\cos((j-n)\pi u) - \cos((j+n)\pi u)] = \frac{1}{2}\ .
$$

For $j = 1$, $n = 2$ og for $j = 2$, $n = 1$ gir det at

$$
\int_0^1 \mathrm{d}u\; u\; [\cos((j-n)\pi u) - \cos((j+n)\pi u)] = -\frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} = -\frac{16}{9\pi^2}\ .
$$

Følgelig,

$$
\langle x\rangle = (|a_1|^2 + |a_2|^2)\,\frac{L}{2} - \frac{16L}{9\pi^2}\,[a_1^*\, a_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1-\omega_2)t} + a_2^*\, a_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2-\omega_1)t}]\ .
$$

Siden $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$, kan vi innføre vinkler α, β_1 og β_2 og skrive

$$
a_1 = \cos\alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_1}\ , \qquad a_2 = \sin\alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_2}\ .
$$

Det gir at

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \frac{L}{2} - \frac{16L}{9\pi^2}\; \cos\alpha\; \sin\alpha \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1-\omega_2)t-\beta_1+\beta_2]} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_2-\omega_1)t+\beta_1-\beta_2]}\right) \\
&= \frac{L}{2} - \frac{16L}{9\pi^2}\; \sin(2\alpha)\; \cos((\omega_1-\omega_2)t - \beta_1 + \beta_2)\ .
\end{aligned}
$$

Forventningsverdien av x^2 beregnes på tilsvarende måte:

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \int_0^L \mathrm{d}x\; x^2\; |\Psi(x,t)|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} a_j^*\, a_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j - \omega_n)t} \int_0^L \mathrm{d}x\; x^2\; \frac{2}{L}\; \sin\!\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \sin\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} a_j^*\, a_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j - \omega_n)t}\, 2L^2 \int_0^1 \mathrm{d}u\; u^2\; \sin(j\pi u)\; \sin(n\pi u) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} a_j^*\, a_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j - \omega_n)t}\, L^2 \int_0^1 \mathrm{d}u\; u^2\; [\cos((j-n)\pi u) - \cos((j+n)\pi u)]\;\; .
\end{aligned}$$

I tilfellet $j = n$ har vi at

$$\int_0^1 \mathrm{d}u\; u^2\; \cos((j-n)\pi u) = \int_0^1 \mathrm{d}u\; u^2 = \frac{1}{3}\; .$$

To ganger delvis integrasjon gir for $k \neq 0$ at

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}u\; u^2\; \cos(k\pi u) &= \left.\frac{u^2\, \sin(k\pi u)}{k\pi}\right|_{u=0}^{1} - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \mathrm{d}u\; 2u\; \sin(k\pi u) \\
&= -\frac{2}{k\pi} \int_0^1 \mathrm{d}u\; u\; \sin(k\pi u) \\
&= \left.\frac{2u\; \cos(k\pi u)}{(k\pi)^2}\right|_{u=0}^{1} - \frac{2}{(k\pi)^2} \int_0^1 \mathrm{d}u\;\; \cos(k\pi u) \\
&= \left.\frac{2u\; \cos(k\pi u)}{(k\pi)^2}\right|_{u=0}^{1} - \left.\frac{2\sin(k\pi u)}{(k\pi)^3}\right|_{u=0}^{1} \\
&= \frac{2\cos(k\pi)}{(k\pi)^2} = \frac{2(-1)^k}{(k\pi)^2}\; .
\end{aligned}$$

For $j = n = 1$ og $j = n = 2$ gir det at

$$\int_0^1 \mathrm{d}u\; u^2\; [\cos((j-n)\pi u) - \cos((j+n)\pi u)] = \frac{1}{3} - \frac{2}{(2j\pi)^2}\; .$$

For $j = 1$, $n = 2$ og for $j = 2$, $n = 1$ gir det at

$$\int_0^1 \mathrm{d}u\; u^2\; [\cos((j-n)\pi u) - \cos((j+n)\pi u)] = -\frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} = -\frac{16}{9\pi^2}\; .$$

Med $|a_1|^2 = \cos^2\alpha = (1 + \cos(2\alpha))/2$ og $|a_2|^2 = \sin^2\alpha = (1 - \cos(2\alpha))/2$ får vi at

$$\begin{aligned}
\langle x^2 \rangle &= \left(\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2}\right) |a_1|^2 + \left(\frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{8\pi^2}\right) |a_2|^2 - \frac{16L^2}{9\pi^2}\, [a_1^*\, a_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 - \omega_2)t} + a_2^*\, a_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 - \omega_1)t}] \\
&= \frac{L^2}{3} - \frac{L^2(5 + 3\cos(2\alpha))}{16\pi^2} - \frac{16L^2}{9\pi^2}\; \sin(2\alpha)\; \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \beta_1 + \beta_2)\;\; .
\end{aligned}$$

Variansen blir da

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(x) &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\
&= \frac{L^2}{12} - \frac{L^2(5+3\cos(2\alpha))}{16\pi^2} - \frac{256L^2}{81\pi^4}\,\sin^2(2\alpha)\,\cos^2((\omega_1-\omega_2)t-\beta_1+\beta_2)
\end{aligned}$$

Vi ser at forventningsverdien og variansen av x er tidsuavhengige hvis og bare hvis enten $a_1 = 0$ eller $a_2 = 0$. I begge disse tilfellene er tilstanden en energiegentilstand, enten ψ_2 eller ψ_1, det vil si at den er stasjonær, og dermed er alle forventningsverdier tidsuavhengige.

e) Impulsen til partikkelen, i en dimensjon, representeres i kvantemekanikken ved derivasjonsoperatoren

$$p = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial}{\partial x} = -\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\ .$$

La $\Psi(x,t)$ være den samme tidsavhengige bølgefunksjonen som ovenfor, under punkt d), og beregn forventningsverdien av impulsen p, definert som

$$\langle p \rangle = \int_0^L \mathrm{d}x\ \Psi^*\,p\,\Psi = \int_0^L \mathrm{d}x\ (\Psi(x,t))^*\left(-\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right).$$

Beregn også forventningsverdien av p^2,

$$\langle p \rangle = \int_0^L \mathrm{d}x\ \Psi^*\,p^2\,\Psi = \int_0^L \mathrm{d}x\ (\Psi(x,t))^*\left((-\mathrm{i}\hbar)^2\,\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}\right),$$

og variansen av p,

$$\mathrm{var}(p) = \left\langle (p - \langle p \rangle)^2 \right\rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2\ .$$

For hvilke verdier av de komplekse koeffisientene a_1 og a_2 er forventningsverdien og variansen av p tidsuavhengige?

Forventningsverdien av impulsen p er

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle &= \int_0^L \mathrm{d}x\ (\Psi(x,t))^*\,(p\Psi(x,t)) = \int_0^L \mathrm{d}x\ (\Psi(x,t))^*\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\,\Psi(x,t)\right) \\
&= \int_0^L \mathrm{d}x\ \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} a_j^*\,a_n\,(\psi_j(x))^*\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\psi_n'(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j-\omega_n)t} \\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} a_j^*\,a_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j-\omega_n)t}\int_0^L \mathrm{d}x\ \frac{2}{L}\ \sin\!\left(\frac{j\pi x}{L}\right)\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{n\pi}{L}\cos\!\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} a_j^*\,a_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j-\omega_n)t}\,\frac{2n\pi\hbar}{\mathrm{i}L}\int_0^1 \mathrm{d}u\ \sin(j\pi u)\,\cos(n\pi u) \\
&= \sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} a_j^*\,a_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j-\omega_n)t}\,\frac{n\pi\hbar}{\mathrm{i}L}\int_0^1 \mathrm{d}u\ \left[\sin((j-n)\pi u)+\sin((j+n)\pi u)\right]\ .
\end{aligned}$$

For $k = 0$ er

$$\int_0^1 \mathrm{d}u\ \sin(k\pi u) = 0\ ,$$

og for $k \neq 0$ er

$$\int_0^1 \mathrm{d}u \ \sin(k\pi u) = \left.\frac{\cos(k\pi u)}{k\pi}\right|_{u=0}^1 = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \ .$$

Det gir at

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle \ &= \ a_1^* \, a_2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 - \omega_2)t} \, \frac{2\pi\hbar}{\mathrm{i}L} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} \right) + a_2^* \, a_1 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 - \omega_1)t} \, \frac{\pi\hbar}{\mathrm{i}L} \left(-\frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} \right) \\
&= \ \frac{8\hbar}{3\mathrm{i}L} \left(a_1^* \, a_2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 - \omega_2)t} - a_2^* \, a_1 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_2 - \omega_1)t} \right) \\
&= \ \frac{8\hbar}{3\mathrm{i}L} \ \cos\alpha \ \sin\alpha \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_1 - \omega_2)t - \beta_1 + \beta_2]} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}[(\omega_2 - \omega_1)t + \beta_1 - \beta_2]} \right) \\
&= \ \frac{8\hbar}{3L} \ \sin(2\alpha) \ \sin[(\omega_1 - \omega_2)t - \beta_1 + \beta_2] \ .
\end{aligned}$$

Forventningsverdien av p^2 er enkel å regne ut, fordi hver ψ_n er en egentilstand for p^2,

$$p^2 \Psi = -\hbar^2 \, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \, \Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{2} a_n \, (-\hbar^2) \psi_n''(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t} = \sum_{n=1}^{2} a_n \, \frac{(n\pi\hbar)^2}{L^2} \, \psi_n(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t} \ .$$

Følgelig er

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle \ &= \ \int_0^L \mathrm{d}x \ (\Psi(x,t))^* \, (p^2 \Psi(x,t)) \\
&= \ \int_0^L \mathrm{d}x \ \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=1}^{2} a_j^* \, a_n \, (\psi_j(x))^* \, \frac{(n\pi\hbar)^2}{L^2} \, \psi_n(x) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_j - \omega_n)t} \\
&= \ \sum_{j=1}^{2} |a_j|^2 \, \frac{(j\pi\hbar)^2}{L^2} = \frac{(\pi\hbar)^2}{L^2} \, (|a_1|^2 + 4\,|a_2|^2) = \frac{(\pi\hbar)^2}{L^2} \, \frac{5 - 3\cos(2\alpha)}{2} \ .
\end{aligned}$$

Og variansen av p blir

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(p) \ &= \ \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \\
&= \ \frac{(\pi\hbar)^2}{L^2} \, \frac{5 - 3\cos(2\alpha)}{2} - \frac{64\hbar^2}{9L^2} \ \sin^2(2\alpha) \ \sin^2[(\omega_1 - \omega_2)t - \beta_1 + \beta_2] \ .
\end{aligned}$$

Kommentar

Når vi nå har formler for usikkerhetene i posisjon og impuls, $\Delta x = \sqrt{\mathrm{var(x)}}$ og $\Delta p = \sqrt{\mathrm{var(p)}}$, kan vi sjekke at Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er oppfylt. Den sier at

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \ ,$$

eller når vi kvadrerer,

$$\mathrm{var}(x) \, \mathrm{var}(p) \geq \frac{\hbar^2}{4} \ .$$

Sett $\tau = (\omega_1 - \omega_2)t - \beta_1 + \beta_2$, da er

$$\begin{aligned} U \equiv \frac{4 \, \mathrm{var}(x) \, \mathrm{var}(p)}{\hbar^2} &= 4 \left(\frac{1}{12} - \frac{5 + 3\cos(2\alpha)}{16\pi^2} - \frac{256}{81\pi^4} \sin^2(2\alpha) \, \cos^2\tau \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\pi^2(5 - 3\cos(2\alpha))}{2} - \frac{64}{9} \sin^2(2\alpha) \, \sin^2\tau \right) \ . \end{aligned}$$

Dette uttrykket skal helst ikke bli mindre enn 1 for noen verdi av α eller τ.

For de stasjonære tilstandene ψ_1 (dvs. for $\alpha = 0$) og ψ_2 (dvs. for $\alpha = \pi/2$) er variansene tidsuavhengige. For $\alpha = 0$ er

$$U = \frac{\pi^2}{3} - 2 = 1{,}2899 > 1 \ .$$

For $\alpha = \pi/2$ er

$$U = \frac{4\pi^2}{3} - 2 = 11{,}5947 \gg 1 \ .$$

At ψ_1 nesten minimaliserer Heisenbergs usikkerhetsrelasjon, kan vi forstå intuitivt. Den er nemlig en funksjon med bare ett maksimum, og det representerer et kompromiss mellom to motstridende hensyn: vi ønsker å minimalisere spredningen i posisjon og samtidig minimalisere variasjonen i den deriverte. At ψ_2 ikke har noen sjanse til å minimalisere Heisenbergs usikkerhetsrelasjon, er heller ikke overraskende, ut fra et lignende resonnement. Den har nemlig to topper, eller rettere en topp og en bunn, med et nullpunkt imellom.

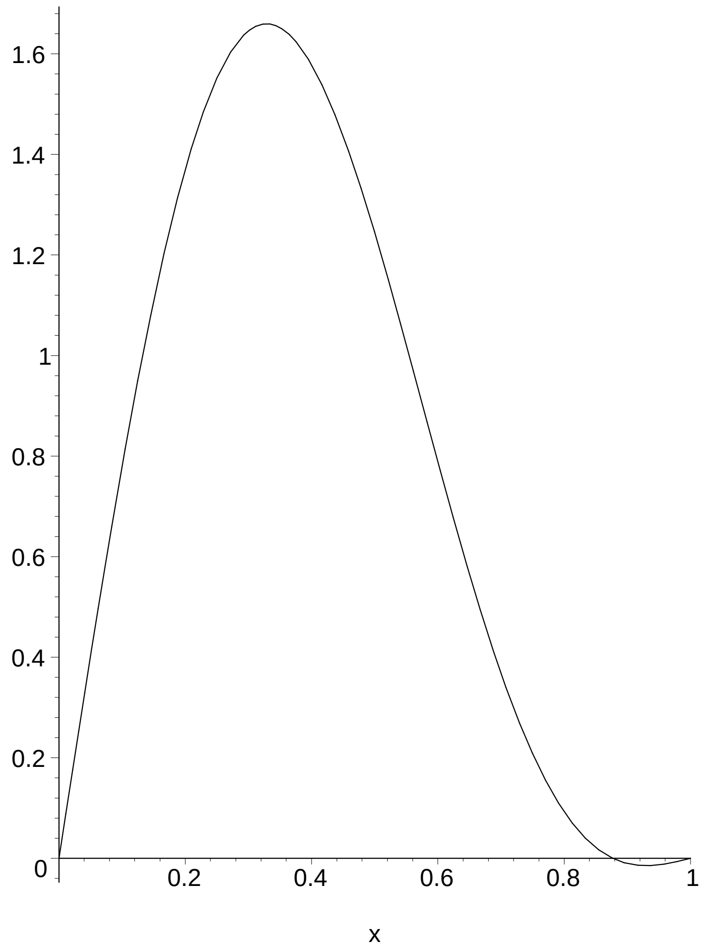
Med numerisk regning finner vi, ganske overraskende, at $\alpha = \alpha_0 = 0{,}494963$, $\tau = 0$ gir en minimumsverdi

$$U = 1{,}22935 > 1 \ .$$

For denne verdien av α er usikkerhetsproduktet $\Delta x \, \Delta p$ tidsavhengig. Det er alltid større enn $\hbar/2$, og det meste av tiden er det mye større. Den bølgefunksjonen som gjør usikkerhetsproduktet spesielt lite, er

$$\Psi(x) = \cos\alpha_0 \, \psi_1(x) + \sin\alpha_0 \, \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\cos\alpha_0 \, \sin\!\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\alpha_0 \, \sin\!\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) .$$

Figur 1 viser hvordan denne bølgefunksjonen ser ut.



Figur 1: Eksempel på en bølgefunksjon som gjør usikkerhetsproduktet $\Delta x\,\Delta p$ lite, i en boks med lengde $L = 1$.