Løsning til øving 9 for FY1004, høsten 2007

a) Utgangspunktet for å bevise Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er ulikheten $\langle A^\dagger A\rangle \geq 0$ for den spesielle operatoren
$$A = x + \mathrm{i}\alpha\, p + (\beta + \mathrm{i}\gamma)\, I \ ,$$
der α, β og γ er reelle konstanter, og I er identitetsoperatoren.

Operatoren A har samme dimensjon som operatoren x, altså lengde. Derfor må α ha dimensjon lengde/impuls, altså tid/masse, mens både β og γ må ha dimensjon lengde.

b) Vi skal vise at
$$A^\dagger A = x^2 + \alpha^2 p^2 + (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\hbar)\, I + 2\beta\, x + 2\alpha\gamma\, p \ .$$

Det skjer ved direkte utregning, der vi må huske at $xp \neq px$:
$$\begin{aligned}
A^\dagger A &= (x - \mathrm{i}\alpha\, p + (\beta - \mathrm{i}\gamma)\, I)(x + \mathrm{i}\alpha\, p + (\beta + \mathrm{i}\gamma)\, I) \\
&= x^2 + \mathrm{i}\alpha\, xp + (\beta + \mathrm{i}\gamma)\, x - \mathrm{i}\alpha\, px + \alpha^2 p^2 - \mathrm{i}\alpha(\beta + \mathrm{i}\gamma)\, p \\
&\quad + (\beta - \mathrm{i}\gamma)\, x + \mathrm{i}\alpha(\beta - \mathrm{i}\gamma)\, p + (\beta^2 + \gamma^2)\, I \\
&= x^2 + \mathrm{i}\alpha\,(xp - px) + 2\beta\, x + \alpha^2 p^2 + 2\alpha\gamma\, p + (\beta^2 + \gamma^2)\, I \\
&= x^2 + \alpha^2 p^2 + (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\hbar)\, I + 2\beta\, x + 2\alpha\gamma\, p \ .
\end{aligned}$$

Vi bruker den kanoniske kommutasjonsrelasjonen $[x,p] = xp - px = \mathrm{i}\hbar\, I$.

c) Ved å ta forventningsverdien i en vilkårlig tilstand ψ får vi ulikheten
$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle A^\dagger A\rangle = \langle x^2\rangle + \alpha^2\,\langle p^2\rangle + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\hbar + 2\beta\,\langle x\rangle + 2\alpha\gamma\,\langle p\rangle \\
&= \langle x^2\rangle + \alpha^2\,\langle p^2\rangle + (\beta + \langle x\rangle)^2 - \langle x\rangle^2 + (\gamma + \alpha\,\langle p\rangle)^2 - \alpha^2\langle p\rangle^2 - \alpha\hbar \ ,
\end{aligned}$$

som gjelder for alle verdier av konstantene α, β og γ.

Vi vil velge α, β og γ slik at høyresiden av ulikheten blir minimal, og vi ser av det siste uttrykket at vi må velge $\beta = -\langle x\rangle$ og $\gamma = -\alpha\,\langle p\rangle$. En mindre utspekulert metode for å komme fram til samme resultat, er å derivere med hensyn på β og γ og sette de deriverte lik null.

Minimaliseringen med hensyn på β og γ gir ulikheten
$$0 \leq \langle x^2\rangle + \alpha^2\,\langle p^2\rangle - \langle x\rangle^2 - \alpha^2\langle p\rangle^2 - \alpha\hbar = (\Delta x)^2 + \alpha^2\,(\Delta p)^2 - \alpha\hbar \ ,$$

som gjelder for alle verdier av α. Det står igjen å minimalisere høyresiden her med hensyn på α. Rett-fram-metoden er å derivere med hensyn på α og sette den deriverte lik null, men hvis vi vil være smarte, kan vi skrive ulikheten slik:
$$0 \leq (\Delta x)^2 + (\Delta p)^2\left(\alpha^2 - \alpha\,\frac{\hbar}{(\Delta p)^2}\right) = (\Delta x)^2 + (\Delta p)^2\left(\alpha - \frac{\hbar}{2(\Delta p)^2}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{4(\Delta p)^2} \ .$$

Da ser vi direkte at vi minimaliserer ved å velge
$$\alpha = \frac{\hbar}{2\,(\Delta p)^2} \ ,$$

og det gir ulikheten

$$0 \le (\Delta x)^2 - \frac{\hbar^2}{4\,(\Delta p)^2}\ ,$$

eller ekvivalent,

$$(\Delta x)^2\,(\Delta p)^2 \ge \frac{\hbar^2}{4}\ .$$

Som er kvadratet av Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.

d) Vi ser spesielt på grunntilstanden til en endimensjonal harmonisk oscillator,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}\,\sqrt[4]{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\ ,$$

der ℓ er en karakteristisk lengde for oscillatoren, og vil vise at i en slik gaussisk tilstand gjelder usikkerhetsrelasjonen som en likhet.

Forventningsverdien av x i denne tilstanden er

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x\,|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\ell^2}} = -\frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}\,\frac{\ell^2}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\ell^2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\ .$$

Rent bortsett fra at integralet kan løses eksplisitt og har verdien null, ser vi at det er lik null fordi integranden $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\ell^2}}$ er antisymmetrisk, $f(-x) = -f(x)$, slik at integralet blir null når vi integrerer over både negative og positive verdier av x.

Forventningsverdien av x^2 er

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ x^2\,|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\ell^2}} = \frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}\,\frac{\ell^3\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\ell^2}{2}\ ,$$

i følge den oppgitte formelen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ x^2\,\mathrm{e}^{-\mu x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu^{3/2}}\ .$$

Forventningsverdien av p i den samme tilstanden er

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ (\psi(x))^*\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\psi(x) = \frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(-\frac{x}{\ell^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}} = 0\ .$$

Og forventningsverdien av p^2 er

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ (\psi(x))^*\,(-\hbar^2)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,\psi(x) = \frac{1}{\ell\sqrt{\pi}}\,\frac{\hbar^2}{\ell^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\ \left(1-\frac{x^2}{\ell^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\ell^2}}\\ &= \frac{\hbar^2}{\ell^3\sqrt{\pi}}\left(\ell\sqrt{\pi} - \frac{\ell^3\sqrt{\pi}}{2\ell^2}\right) = \frac{\hbar^2}{2\ell^2}\ ,\end{aligned}$$

idet

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}} = -\frac{1}{\ell^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\right) = -\frac{1}{\ell^2}\left(1-\frac{x^2}{\ell^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\ .$$

Vi bruker dessuten de oppgitte formlene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-\mu x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu}} \;, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; x^2 \, \mathrm{e}^{-\mu x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu^{3/2}} \;.$$

Dermed har vi at

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \;, \qquad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\,\ell} \;,$$

som gir det vi skulle vise, at

$$\Delta x \, \Delta p = \frac{\hbar}{2} \;.$$

e) Vi finner en minimum usikkerhetstilstand ψ ved å løse den førsteordens differensialligningen

$$x\psi(x) + \alpha\hbar \, \psi'(x) + (\beta + \mathrm{i}\gamma) \, \psi(x) = 0 \;.$$

der α, β og γ er vilkårlige reelle konstanter, bortsett fra at vi må ha $\alpha > 0$.

Ligningen kan omskrives slik:

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = -\frac{1}{\alpha\hbar} \, (x + \beta + \mathrm{i}\gamma) \;.$$

Da kan den integreres direkte, og gir at

$$\ln|\psi(x)| = -\frac{1}{2\alpha\hbar} \, (x + \beta + \mathrm{i}\gamma)^2 + \text{konstant} \;.$$

Eller, etter eksponensiering,

$$\psi(x) = C \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\alpha\hbar} \, (x+\beta+\mathrm{i}\gamma)^2} \;,$$

der C er en normeringskonstant.

Dette er en ganske generell minimum usikkerhetstilstand. Grunntilstanden til den harmoniske oscillatoren er et spesialtilfelle med $\alpha = \ell^2/\hbar$ og $\beta = \gamma = 0$.

Om det finnes enda mer generelle minimum usikkerhetstilstander, vet ikke jeg.

Det som går galt hvis $\alpha < 0$, er naturligvis at tilstanden $\psi(x)$ ikke blir normerbar, idet $|\psi(x)|$ vokser over alle grenser når $|x| \to \infty$.