Løsning til øving 11 for FY1004, høsten 2007

En partikkel med masse m, i en dimensjon, beveger seg i et trinnpotensial $V(x)$, gitt ved at

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x < 0 \;, \\ U & \text{for} \quad x > 0 \;. \end{cases}$$

U er en konstant som kan være positiv eller negativ.

Løs den stasjonære Schrödingerligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi''(x) + V(x)\,\psi(x) = E\psi(x) \;,$$

når energien E er positiv og større enn U. Tilfellet $0 < E < U$ er behandlet i læreboka.

Definer to konstanter $k > 0$ og $K > 0$ ved at

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = U + \frac{\hbar^2 K^2}{2m} \;.$$

For $x < 0$ har vi den stasjonære Schrödingerligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi''(x) = E\psi(x) \;,$$

eller ekvivalent,

$$\psi''(x) = -k^2\psi(x) \;,$$

med generell løsning

$$\psi(x) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \;,$$

der A og B er komplekse konstanter.

For $x > 0$ har vi ligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\psi''(x) + U\,\psi(x) = E\psi(x) \;,$$

eller ekvivalent,

$$\psi''(x) = -K^2\psi(x) \;,$$

med generell løsning

$$\psi(x) = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx} + D\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kx} \;,$$

der C og D er to andre komplekse konstanter.

For $x = 0$ skal både ψ og ψ' være kontinuerlige. Kontinuitet av ψ gir ligningen

$$A + B = C + D \;,$$

og kontinuitet av ψ' gir ligningen

$$k\,(A - B) = K\,(C - D) \;.$$

Vi kan for eksempel løse disse to ligningene med hensyn på A og B:

$$A = \frac{(k+K)C + (k-K)D}{2k} \;, \qquad B = \frac{(k-K)C + (k+K)D}{2k} \;.$$

Beregn sannsynlighetsstrømmen

$$j(x) = \mathrm{Re}\left[\psi^*(x)\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}m}\,\psi'(x)\right]$$

for $x < 0$ og $x > 0$.

For $x < 0$ er

$$\begin{aligned} j(x) &= \mathrm{Re}\left[(A^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + B^*\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx})\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}m}\,(\mathrm{i}kA\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \mathrm{i}kB\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})\right] \\ &= \frac{\hbar k}{m}\,\mathrm{Re}\left[|A|^2 - |B|^2 - A^*B\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}kx} + B^*A\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx}\right] = \frac{\hbar k}{m}\,(|A|^2 - |B|^2)\ . \end{aligned}$$

For $x > 0$ er, i følge en tilsvarende utregning,

$$j(x) = \frac{\hbar K}{m}\,(|C|^2 - |D|^2)\ .$$

Se på den situasjonen at strømmen $j(x)$ har både et innkommende (positivt) bidrag og et utgående (negativt) bidrag for $x < 0$, men bare et utgående (positivt) bidrag og ikke noe innkommende (negativt) bidrag for $x > 0$. Definer refleksjonskoeffisienten (refleksjonssannsynligheten) R og transmisjonskoeffisienten (transmisjonssannsynligheten) T, og uttrykk begge ved energien E og forskjellen U mellom potesiell energi for $x > 0$ og $x < 0$.

Den antagelsen som gjøres, er at $D = 0$. Da er

$$A = \frac{(k+K)C}{2k}\ , \qquad B = \frac{(k-K)C}{2k}\ .$$

Strømmen for $x < 0$ er

$$j(x) = \frac{\hbar k}{m}\,(|A|^2 - |B|^2) = \frac{\hbar}{4km}\,|C|^2\,((k+K)^2 - (k-K)^2) = \frac{\hbar K}{m}\,|C|^2\ .$$

Den har et positivt bidrag, som er den innkommende strømmen

$$j_i(x) = \frac{\hbar}{4km}\,|C|^2\,(k+K)^2\ ,$$

og et negativt bidrag, som er den reflekterte strømmen

$$j_r(x) = \frac{\hbar}{4km}\,|C|^2\,(k-K)^2\ ,$$

når vi definerer $j_r(x) > 0$, altså slik at den totale strømmen er $j(x) = j_i(x) - j_r(x)$.

Strømmen for $x > 0$ er den transmitterte strømmen,

$$j(x) = j_t(x) = \frac{\hbar K}{m}\,|C|^2\ .$$

Siden vi har en stasjonær tilstand, vet vi at strømmen er konstant i tiden, og siden sannsynligheten er bevart (partikler hverken skapes eller forsvinner), må strømmen også være konstant som funksjon av x. Spesielt er den totale strømmen $j(x)$ like stor for $x < 0$ og $x > 0$.

Vi kan nå definere refleksjonskoeffisienten

$$R = \frac{j_r}{j_i} = \frac{(k-K)^2}{(k+K)^2} = \frac{(\sqrt{E} - \sqrt{E-U})^2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E-U})^2}$$

og transmisjonskoeffisienten

$$T = \frac{j_t}{j_i} = \frac{4kK}{(k+K)^2} = \frac{4\sqrt{E(E-U)}}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-U})^2} \; .$$

Vi ser at $R + T = 1$, alle partiklene blir enten reflektert eller transmittert.

Hva blir R og T i grensetilfellet $U \to -\infty$?

Med andre ord: Hvis du står på toppen av et uendelig høyt stup, hvor stor er risikoen for å falle utfor?

Når $U \to -\infty$ vil

$$K = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} \to \infty \; ,$$

mens k er konstant. Da vil $R \to 1$ og $T \to 0$. Risikoen for å falle utfor et uendelig høyt stup er lik null!

Det anbefales likevel ikke å teste denne teorien eksperimentelt!! Kanskje kan vi ikke stole helt på analogien mellom et tredimensjonalt stup og et endimensjonalt potensialtrinn?