Løsning til øving 12 for FY1004, høsten 2007

Reduksjon av topartikkelproblemet

To partikler med masser m_1 og m_2 har posisjoner $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$. Vi antar at den potensielle energien V er en funksjon bare av den relative posisjonen $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, altså at $V = V(\vec{r}) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

Klassisk mekanikk

I følge klassisk mekanikk påvirkes partikkel 1 av en kraft $\vec{F}_1 = -\nabla_1 V$ og partikkel 2 av en kraft $\vec{F}_2 = -\nabla_2 V$, der ∇_1 og ∇_2 er gradientoperatorene med hensyn på henholdsvis $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$. Når $V = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, så er $\vec{F}_1 = -\nabla V$ og $\vec{F}_2 = +\nabla V$, der ∇ gradientoperatoren med hensyn på $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Altså er $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, som er Newtons tredje lov.

Partikkel nr. j har hastighet $\vec{v}_j = \mathrm{d}\vec{r}_j/\mathrm{d}t$ og impuls $\vec{p}_j = m_j\vec{v}_j$, og i følge Newtons andre lov er de tidsderiverte av impulsene lik kreftene,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1 \ , \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2 \ .$$

Newtons tredje lov impliserer at den totale impulsen $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ er en bevegelseskonstant,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = 0 \ .$$

Det betyr at massesenteret

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

beveger seg med en hastighet $\vec{V} = \mathrm{d}\vec{R}/\mathrm{d}t$ som er konstant. Når vi definerer $M = m_1 + m_2$, har vi nemlig at $\vec{P} = M\vec{V}$.

Istedenfor partikkelposisjonene $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ kan vi bruke massesenterposisjonen $\vec{R}$ og den relative posisjonen $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ til å beskrive topartikkelsystemet. Tilsvarende bruker vi massesenterhastigheten $\vec{V} = \mathrm{d}\vec{R}/\mathrm{d}t$ og den relative hastigheten $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

a) Vis at den totale energien,

$$E = \frac{1}{2}\,m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\,m_2\vec{v}_2^{\,2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \ ,$$

også kan skrives slik:

$$E = \frac{1}{2}\,M\vec{V}^{\,2} + \frac{1}{2}\,m\vec{v}^{\,2} + V(\vec{r}) \ ,$$

når vi innfører den *reduserte massen* $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$. Definisjonen kan også skrives slik:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \ .$$

Beviset er en direkte utregning. Ligningene

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \ , \\ \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \ , \end{aligned}$$

kan løses for $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$, med resultatet

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{V} + \frac{m_2\vec{v}}{m_1 + m_2} = \vec{V} + \frac{m_2\vec{v}}{M} \ , \\ \vec{v}_2 &= \vec{V} - \frac{m_1\vec{v}}{m_1 + m_2} = \vec{V} - \frac{m_1\vec{v}}{M} \ , \end{aligned}$$

der $M = m_1 + m_2$. Så setter vi inn og finner den totale kinetiske energien,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\,m_2\vec{v}_2^{\,2} &= \frac{1}{2}\,m_1\left(\vec{V} + \frac{m_2}{M}\,\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2}\,m_2\left(\vec{V} - \frac{m_1}{M}\,\vec{v}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,\vec{V}^{\,2} + \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2^{\,2} + m_1^{\,2} m_2}{M^2}\,\vec{v}^{\,2} \\
&= \frac{1}{2}\,M\vec{V}^{\,2} + \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{M}\,\vec{v}^{\,2} \\
&= \frac{1}{2}\,M\vec{V}^{\,2} + \frac{1}{2}\,m\,\vec{v}^{\,2}\;.
\end{aligned}$$

b) Vi definerer den relative impulsen som $\vec{p} = m\vec{v}$, der m er den reduserte massen og $\vec{v}$ den relative hastigheten. Vis at

$$\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}\;,$$

og at

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = -\nabla V\;.$$

Definisjonen av $\vec{p}$ gir at

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_1 m_2}{M}\,(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \frac{m_1 m_2}{M}\left(\frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2}\right) = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{M} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}\;.$$

Derfor er

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\nabla V - \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\nabla V = -\nabla V\;.$$

Dermed har vi redusert topartikkelproblemet til to uavhengige enpartikkelproblem. Den ene ≪partikkelen≫ har masse M og posisjon $\vec{R}$, som er massesenterposisjonen, mens den andre ≪partikkelen≫ har masse m, posisjon $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ og potensiell energi $V(\vec{r})$.

Kvantemekanikk

Den samme reduksjonen fra et topartikkelproblem til to uavhengige enpartikkelproblem kan vi gjøre i kvantemekanikken. Da definerer vi på samme måte

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}\;, \qquad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\;, \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\;, \qquad \vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1+m_2}\;,$$

samt $M = m_1 + m_2$ og $m = m_1 m_2/(m_1+m_2)$.

Her må vi tolke $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{p}_1$ og $\vec{p}_2$ som operatorer. De opererer på bølgefunksjoner som er funksjoner av 6 variable,

$$\psi = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)\;.$$

Spesielt er impulsoperatorene definert ved gradientoperatorene,

$$\vec{p}_1 = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\nabla_1\;, \qquad \vec{p}_2 = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\nabla_2\;.$$

Følgende kommutatorer mellom koordinater og impulskomponenter er ikke lik null:

$$[x_1, p_{1x}] = [y_1, p_{1y}] = [z_1, p_{1z}] = [x_2, p_{2x}] = [y_2, p_{2y}] = [z_2, p_{2z}] = \mathrm{i}\hbar\;.$$

Alle andre kommutatorer er lik null, for eksempel

$$[x_1, y_1] = [x_1, x_2] = [x_1, p_{1y}] = [x_1, p_{2x}] = \ldots = 0\;.$$

c) Vis at det gjelder tilsvarende kommutasjonsrelasjoner for operatorene $\vec{R}$, $\vec{P}$, $\vec{r}$ og $\vec{p}$ som for operatorene $\vec{r}_1$, $\vec{p}_1$, $\vec{r}_2$ og $\vec{p}_2$, nemlig

$$[X, P_x] = [Y, P_y] = [Z, P_z] = [x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = \mathrm{i}\hbar \ .$$

Mens alle andre kommutatorer er lik null.

Vi kan i hvert fall beregne noen av kommutatorene, så ser vi kanskje uten videre hva de andre blir? Ta for eksempel

$$\begin{aligned}[X, P_x] &= \left[\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \, , \, p_{1x} + p_{2x}\right] \\ &= \frac{m_1}{M}\left([x_1, p_{1x}] + [x_1, p_{2x}]\right) + \frac{m_2}{M}\left([x_2, p_{1x}] + [x_2, p_{2x}]\right) \\ &= \frac{m_1}{M}(\mathrm{i}\hbar + 0) + \frac{m_2}{M}(0 + \mathrm{i}\hbar) = \mathrm{i}\hbar \ .\end{aligned}$$

På samme måte,

$$[X, P_y] = \left[\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \, , \, p_{1y} + p_{2y}\right] = \ldots = 0 \ .$$

Videre,

$$\begin{aligned}[X, p_x] &= \left[\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \, , \, \frac{m_2 p_{1x} - m_1 p_{2x}}{M}\right] \\ &= \frac{m_1}{M^2}\left(m_2 [x_1, p_{1x}] - m_1 [x_1, p_{2x}]\right) + \frac{m_2}{M^2}\left(m_2 [x_2, p_{1x}] - m_1 [x_2, p_{2x}]\right) \\ &= \frac{m_1}{M^2}(\mathrm{i}\hbar m_2 - 0) + \frac{m_2}{M^2}(0 - \mathrm{i}\hbar m_1) = 0 \ .\end{aligned}$$

Og videre,

$$\begin{aligned}[x, p_x] &= \left[x_1 - x_2 \, , \, \frac{m_2 p_{1x} - m_1 p_{2x}}{M}\right] \\ &= \frac{m_2}{M}\left([x_1, p_{1x}] - [x_2, p_{1x}]\right) - \frac{m_1}{M}\left([x_1, p_{2x}] - [x_2, p_{2x}]\right) \\ &= \frac{m_2}{M}(\mathrm{i}\hbar - 0) - \frac{m_1}{M}(0 - \mathrm{i}\hbar) = \mathrm{i}\hbar \ .\end{aligned}$$

Og enda videre,

$$\begin{aligned}[x, P_x] &= [x_1 - x_2 \, , \, p_{1x} + p_{2x}] = [x_1, p_{1x}] + [x_1, p_{2x}] - [x_2, p_{1x}] - [x_2, p_{2x}] \\ &= \mathrm{i}\hbar + 0 - 0 - \mathrm{i}\hbar = 0 \ .\end{aligned}$$

d) Hamiltonoperatoren for topartikkelsystemet er

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \ .$$

Vis at

$$H = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r}) \ .$$

Siden $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, pr. definisjon, gjelder også pr. definisjon at $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V(\vec{r})$.

For å uttrykke den kinetiske energien ved impulsene $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ og

$$\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{M} \,,$$

må vi løse for $\vec{p}_1$ og $\vec{p}_2$, det gir

$$\vec{p}_1 = \frac{m_1}{M}\,\vec{P} + \vec{p}\,, \qquad \vec{p}_2 = \frac{m_2}{M}\,\vec{P} - \vec{p}\,.$$

Så setter vi inn i den kinetiske energien, og får

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} &= \frac{1}{2m_1}\left(\frac{m_1}{M}\,\vec{P} + \vec{p}\right)^2 + \frac{1}{2m_2}\left(\frac{m_2}{M}\,\vec{P} - \vec{p}\right)^2 \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2M^2}\,\vec{P}^{\,2} + \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)\vec{p}^{\,2} \\
&= \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\,.
\end{aligned}$$

e) Den totale dreieimpulsen er

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2\,.$$

Er

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{p}\,?$$

Ja. Regnestykket blir det samme enten vi gjør det klassisk eller kvantemekanisk:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \left(\vec{R} + \frac{m_2}{M}\,\vec{r}\right) \times \left(\frac{m_1}{M}\,\vec{P} + \vec{p}\right) + \left(\vec{R} - \frac{m_1}{M}\,\vec{r}\right) \times \left(\frac{m_2}{M}\,\vec{P} - \vec{p}\right) \\
&= \left(\frac{m_1}{M} + \frac{m_2}{M}\right)\vec{R} \times \vec{P} + \left(\frac{m_2}{M} + \frac{m_1}{M}\right)\vec{r} \times \vec{p} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{p}\,.
\end{aligned}$$