Løsning til øving 18 for FY1004, våren 2008

Rotasjon av spinorer (sammenlign med øving17)

Tilstanden til elektronspinnet beskrives av en spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} ,$$

normert slik at $\psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_1|^2 = 1$. Spinoren ψ kan vi assosiere med en retning i rommet, dvs. en tredimensjonal enhetsvektor $\vec{n} = \langle \vec{\sigma} \rangle = \psi^\dagger \vec{\sigma} \psi$, med komponentene

$$\begin{aligned} n_x &= \langle \sigma_x \rangle = \psi^\dagger \sigma_x \psi = \psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1 \ , \\ n_y &= \langle \sigma_y \rangle = \psi^\dagger \sigma_y \psi = -\mathrm{i}\,(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1) \ , \\ n_z &= \langle \sigma_z \rangle = \psi^\dagger \sigma_z \psi = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 \ . \end{aligned}$$

Vi definerer nå 2×2-matrisen

$$U = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) I - \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sigma_z = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} ,$$

og vil vise at den representerer en rotasjon om z-aksen. Den transformerer spinoren ψ til en ny spinor

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = U\psi = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\, \psi_1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\, \psi_2 \end{pmatrix} ,$$

a) Vis at enhetsvektoren $\vec{m} = \phi^\dagger \vec{\sigma} \phi$ assosiert med den transformerte spinoren ϕ er enhetsvektoren $\vec{n} = \psi^\dagger \vec{\sigma} \psi$ rotert om z-aksen en vinkel α i retning mot klokken.

Vi har at

$$\phi_1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\, \psi_1 \ , \qquad \phi_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\, \psi_2 \ ,$$

og

$$\begin{aligned} m_x &= \phi^\dagger \sigma_x \phi = \phi_1^* \phi_2 + \phi_2^* \phi_1 = \psi_1^* \psi_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \psi_2^* \psi_1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \\ &= (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1) \cos\alpha + \mathrm{i}(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1) \sin\alpha = n_x \cos\alpha - n_y \sin\alpha \ , \\ m_y &= \phi^\dagger \sigma_y \phi = -\mathrm{i}\,(\phi_1^* \phi_2 - \phi_2^* \phi_1) = -\mathrm{i}\,(\psi_1^* \psi_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \psi_2^* \psi_1\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) \\ &= -\mathrm{i}(\psi_1^* \psi_2 - \psi_2^* \psi_1) \cos\alpha + (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1) \sin\alpha = n_y \cos\alpha + n_x \sin\alpha \ , \\ m_z &= \phi^\dagger \sigma_z \phi = |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 = n_z \ . \end{aligned}$$

En annen måte å regne på, er at

$$m_x + \mathrm{i} m_y = 2\phi_1^* \phi_2 = 2\psi_1^* \psi_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = (n_x + \mathrm{i} n_y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \ .$$

Det viser det som skulle vises, at $\vec{m}$ er $\vec{n}$ rotert om z-aksen en vinkel α.

Vi har sett (i øving 14) at matrisen U definert ovenfor kan skrives som en eksponensialfunksjon,

$$U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}\, \sigma_z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{\hbar}\, S_z} \ ,$$

der $S_z = \hbar\sigma_z/2$ er z-komponenten av elektronspinnet.

Vi sier derfor at S_z genererer rotasjoner om z-aksen av spinnet til elektronet.

Da er det kanskje ikke så uventet om vi finner at vi kan bruke z-komponenten av banedreieimpulsen, operatoren L_z, til å generere rotasjoner om z-aksen av en bølgefunksjon i tre dimensjoner, $\psi = \psi(x, y, z) = \psi(r, \theta, \varphi)$? Men først ser vi på a et annet eksempel.

Translasjon av bølgefunksjoner i en dimensjon

La her $\psi = \psi(x)$ være bølgefunksjonen til en partikkel i en dimensjon. Vi påstår at impulsoperatoren

$$p_x = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

genererer translasjoner langs x-aksen. Vi lar a betegne en konstant lengde, og definerer følgende operator, som opererer på endimensjonale bølgefunksjoner,

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{a}{\hbar} p_x} = I - \mathrm{i}\,\frac{a}{\hbar}\, p_x + \frac{1}{2!}\left(-\mathrm{i}\,\frac{a}{\hbar}\, p_x\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(-\mathrm{i}\,\frac{a}{\hbar}\, p_x\right)^n + \cdots \\ &= I - a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{(-a)^2}{2!}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \cdots + \frac{(-a)^n}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + \cdots . \end{aligned}$$

Når U opererer på bølgefunksjonen ψ, får vi en ny bølgefunksjon

$$\phi = U\psi = \psi - a\psi' + \frac{(-a)^2}{2!}\,\psi'' + \cdots + \frac{(-a)^n}{n!}\,\psi^{(n)} + \cdots .$$

b) Vis at $\phi(x) = \psi(x - a)$.

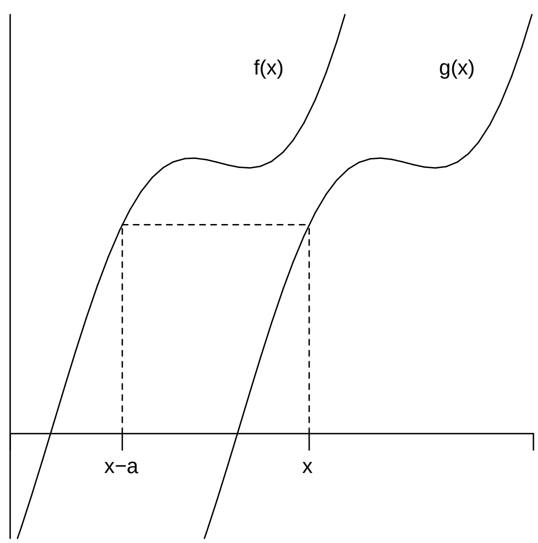
Forklar, gjerne ved hjelp av en figur, hvorfor vi kan tolke denne ligningen slik at bølgefunksjonen ϕ er bølgefunksjonen ψ translatert (flyttet, forskjøvet) en avstand a (og ikke $-a$) langs x-aksen.

Det er bare å regne ut

$$\phi(x) = \psi(x) - a\psi'(x) + \frac{(-a)^2}{2!}\,\psi''(x) + \cdots + \frac{(-a)^n}{n!}\,\psi^{(n)}(x) + \cdots = \psi(x - a) .$$

Forutsetningen her er at Taylor-rekkeutviklingen av $\psi(x)$ omkring $x = a$ er gyldig.

Figur 1 illustrerer at hvis $g(x) = f(x - a)$ for alle verdier av x, så er funksjonen g lik funksjonen f forskjøvet avstanden a langs x-aksen.



Figur 1: Translasjon av en funksjon i en dimensjon

Rotasjon av bølgefunksjoner i tre dimensjoner

Nå tilbake til rotasjon om z-aksen i tre dimensjoner. z-komponenten av banedreieimpulsen er operatoren

$$L_z = xp_y - yp_x = x\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial}{\partial y} - y\,\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial}{\partial x}\ .$$

Istedenfor de kartesiske koordinatene (x, y, z) er det enklere å bruke polarkoordinatene (r, θ, φ), definert ved at

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\ , \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi\ , \qquad z = r\cos\theta\ .$$

c) Hvis ψ er en tredimensjonal bølgefunksjon, $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$, og ϕ er bølgefunksjonen ψ rotert om z-aksen en vinkel α i retning mot klokken, hva er da sammenhengen mellom funksjonsverdiene $\phi(r, \theta, \varphi)$ og $\psi(r, \theta, \varphi)$?

Dette tilfellet er fullstendig analogt med translasjonseksemplet i punkt b). Her må vi ha at $\phi(r, \theta, \varphi) = \psi(r, \theta, \varphi - \alpha)$.

d) Vis at

$$L_z = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\ .$$

Som så ofte ellers lønner det seg å regne baklengs. I følge kjerneregelen for derivasjon har vi at

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\,\frac{\partial}{\partial z} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial y} + 0 = -y\,\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

Multipliser denne ligningen med $\hbar/\mathrm{i}$, så har vi at

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} = xp_y - yp_x = L_z\ .$$

e) Definer en operator U ved at

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{\hbar}L_z} = I - \mathrm{i}\,\frac{\alpha}{\hbar}\,L_z + \frac{1}{2!}\left(-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{\hbar}\,L_z\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(-\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{\hbar}\,L_z\right)^n + \cdots \\ &= I - \alpha\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{(-\alpha)^2}{2!}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \cdots + \frac{(-\alpha)^n}{n!}\,\frac{\partial^n}{\partial\varphi^n} + \cdots\ . \end{aligned}$$

Vis at når vi opererer med U på den tredimensjonale bølgefunksjonen $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$, så får vi en bølgefunksjon $\phi = U\psi$ slik at

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \psi(r, \theta, \varphi - \alpha).$$

Resultatet som skal vises, følger ved Taylor-rekkeutvikling, igjen i full analogi med translasjonseksemplet i punkt b).