Løsning til øving 20 for FY1004, våren 2008

Når elektronet har banedreieimpuls $\vec{L}$ og spinn $\vec{S}$, så har det total dreieimpulse $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.
Igjen bruker vi formlene for dreieimpuls $\vec{J}$, der $|j,m\rangle$ er felles egentilstand for $\vec{J}^{\,2}$ og J_z:

$$\begin{aligned}
\vec{J}^{\,2}\,|j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2\,|j,m\rangle\ ,\\
J_z\,|j,m\rangle &= m\hbar\,|j,m\rangle\ ,\\
J_+\,|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\hbar\,|j,m+1\rangle\ ,\\
J_-\,|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\hbar\,|j,m-1\rangle\ .
\end{aligned}$$

Tilsvarende formler gjelder for $\vec{L}$ og $\vec{S}$.
Vi konkretiserer her og ser på P-tilstander, dvs. tilstander med kvantetall $\ell = 1$ for $\vec{L}^{\,2}$. Vi har alltid $s = \frac{1}{2}$ for et elektron.
Generelt kan vi klassifisere tilstander enten etter egenverdiene til operatorene $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, L_z og S_z, eller etter egenverdiene til operatorene $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, $\vec{J}^{\,2}$ og J_z.

Det betyr at vi har to forskjellige sett med tilstander: tilstandene $|m_\ell, m_s\rangle$ har kvantiserte verdier for L_z og S_z, mens tilstandene $|j, m_j\rangle$ har kvantiserte verdier for $\vec{J}^{\,2}$ og J_z. Når $\ell = 1$, kan den totale dreieimpulsen være enten $j = \frac{3}{2}$ eller $j = \frac{1}{2}$.

a) Repetisjon fra øving 19. Vi så at vi kan identifisere tilstanden der j og m_j begge er maksimale, med tilstanden der m_ℓ og m_s begge er maksimale, altså:

$$\left|j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{3}{2}\right\rangle = \left|m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle .$$

Operer på denne tilstanden med senkeoperatoren $J_- = L_- + S_-$ (bruk J_- på venstre side av likhetstegnet og $L_- + S_-$ på høyre side av likhetstegnet), og finn tilstanden

$$\left|j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{1}{2}\right\rangle$$

som en lineærkombinasjon av tilstandene $|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\rangle$ og $|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\rangle$.

På venstre side får vi:

$$\begin{aligned}
J_-\left|j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{3}{2}\right\rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}\,\hbar\left|j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{1}{2}\right\rangle\\
&= \sqrt{3}\,\hbar\left|j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{1}{2}\right\rangle .
\end{aligned}$$

På høyre side får vi:

$$\begin{aligned}
(L_- + S_-)\left|m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{1\cdot 2 - 1\cdot 0}\,\hbar\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle\\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\,\hbar\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle\\
&= \sqrt{2}\,\hbar\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \hbar\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle .
\end{aligned}$$

Tilsammen gir det at

$$\left|j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle .$$

Eller, om vi skriver mer kortfattet:

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle .$$

Igjen er absoluttkvadratsummen av koeffisientene lik 1, slik at tilstanden er normert.

b) De to tilstandene $|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\rangle$ og $|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\rangle$ er ortogonale enhetsvektorer i Hilbert-rommet.

Finn en lineærkombinasjon av de to som er ortogonal til tilstanden $|j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{1}{2}\rangle$.

Vis at denne tilstanden er egentilstanden $|j = \frac{1}{2}, m_j = \frac{1}{2}\rangle$ for operatorene $\vec{J}^{\,2}$ og J_z.

Hint: For finne hvordan $\vec{J}^{\,2}$ virker på denne tilstanden, kan du for eksemple bruke formelen $\vec{J}^{\,2} = J_- J_+ + J_z^2 + \hbar J_z$.

Vi skal finne koeffisienter α og β slik at tilstandsvektoren

$$|\phi\rangle = \alpha\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \beta\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle$$

er ortogonal til

$$|\psi\rangle = \left|j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle ,$$

det vil si at

$$\begin{aligned} 0 = \langle\psi|\phi\rangle &= \alpha\left\langle\psi\,\middle|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \beta\left\langle\psi\,\middle|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \alpha\left\langle m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\,\middle|\,\psi\right\rangle^* + \beta\left\langle m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\,\middle|\,\psi\right\rangle^* \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\beta\ . \end{aligned}$$

Vi bruker at et skalarprodukt $\langle\psi|\chi\rangle$ er den komplekskonjugerte av det omvendte skalarproduktet $\langle\chi|\psi\rangle$. Denne ligningen bestemmer koeffisientene α og β opp til en vilkårlig felles faktor. For det første er det naturlig å velge dem slik at tilstanden $|\phi\rangle$ er normert, dvs. at

$$\langle\phi|\phi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\ .$$

For det andre er det naturlig å velge dem reelle (vi ødelegger ikke normaliseringen om vi multipliserer α og β med en felles kompleks fasefaktor, men vi kan gjøre livet unødig komplisert for oss selv). Da har vi ett valg igjen, nemlig at en av dem må velges positiv, og da blir den andre negativ. I dette spesielle tilfellet finnes det en alminnelig utbredt fasekonvensjon som sier at vi velger β positiv. Dermed får vi løsningen

$$|\phi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle$$

Vi har at $J_z = L_z + S_z$, og

$$\begin{aligned} J_z|\phi\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\,(L_z + S_z)\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,(L_z + S_z)\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(0 + \frac{1}{2}\right)\hbar\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\hbar\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\hbar\,|\phi\rangle\ . \end{aligned}$$

Så har vi at

$$\vec{J}^{\,2}|\phi\rangle = (J_-J_+ + J_z^{\,2} + \hbar J_z)|\phi\rangle = J_-J_+|\phi\rangle + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2\,|\phi\rangle\;.$$

Her er det litt arbeid å regne ut $J_-J_+|\phi\rangle$, vi får gjøre det i etapper. Vi har:

$$\begin{aligned} J_+\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle \;&=\; (L_+ + S_+)\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle = L_+\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \sqrt{1\cdot 2 - 0\cdot 1}\,\hbar\left|m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{2}\,\hbar\left|m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle, \end{aligned}$$

idet

$$S_+\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}\,\hbar\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{3}{2}\right\rangle = 0\;.$$

Vi har videre:

$$\begin{aligned} J_+\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle \;&=\; (L_+ + S_+)\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle = S_+\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)}\,\hbar\left|m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle \\ &= \hbar\left|m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle, \end{aligned}$$

idet

$$L_+\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{1\cdot 2 - 1\cdot 2}\,\hbar\left|m_\ell = 2, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle = 0\;.$$

Dermed har vi:

$$\begin{aligned} J_+|\phi\rangle \;&=\; -\frac{1}{\sqrt{3}}\,J_+\left|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,J_+\left|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\,\sqrt{2}\,\hbar\left|m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\hbar\left|m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle \\ &= 0\;. \end{aligned}$$

Følgelig er $J_-J_+|\phi\rangle = 0$, og $\vec{J}^{\,2}|\phi\rangle = j(j+1)\hbar^2|\phi\rangle$ med $j = \frac{1}{2}$.

c) Bruk senkeoperatoren $J_- = L_- + S_-$ gjentatte ganger, og finn alle de seks tilstandene $|j, m_j\rangle$ med $j = \frac{3}{2}$, $m_j = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ og $j = \frac{1}{2}$, $m_j = \pm\frac{1}{2}$, som lineærkombinasjoner av de seks tilstandene $|m_\ell, m_s\rangle$ med $m_\ell = \pm 1, 0$ og $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Vi kjenner allerede tre av de seks tilstandene, og nå tillater vi oss å bruke den mer kortfattede notasjonen:

$$\begin{aligned} \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle \;&=\; \left|1, \frac{1}{2}\right\rangle, \\ \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \;&=\; \sqrt{\frac{2}{3}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle, \\ \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \;&=\; -\sqrt{\frac{1}{3}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle. \end{aligned}$$

Vi har:

$$\begin{aligned}
J_-\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle &= 2\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\,(L_-+S_-)\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,(L_-+S_-)\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{2}\,\hbar\left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\hbar\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\sqrt{2}\,\hbar\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle + 0 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\hbar\left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\,\hbar\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle,
\end{aligned}$$

som gir:

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Videre har vi:

$$\begin{aligned}
J_-\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{3}\,\hbar\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}}\,(L_-+S_-)\left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,(L_-+S_-)\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= 0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\hbar\left|-1,-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{2}\,\hbar\left|-1,-\frac{1}{2}\right\rangle + 0 \\
&= \sqrt{3}\,\hbar\left|-1,-\frac{1}{2}\right\rangle,
\end{aligned}$$

som gir:

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \left|-1,-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

Og til slutt har vi:

$$\begin{aligned}
J_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle &= \hbar\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= -\sqrt{\frac{1}{3}}\,(L_-+S_-)\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,(L_-+S_-)\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle \\
&= -\sqrt{\frac{1}{3}}\,\sqrt{2}\,\hbar\left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,\hbar\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sqrt{2}\,\hbar\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle + 0 \\
&= -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\hbar\left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\hbar\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle,
\end{aligned}$$

som gir:

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle.$$

En kontroll på at vi har regnet riktig, er at alle seks tilstandene $|j,m_j\rangle$ med $j=\frac{3}{2}$, $m_j=\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$ og $j=\frac{1}{2}$, $m_j=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ skal være ortogonale.

Kommentar: Hvis vi holder oss innenfor det underrommet av det totale Hilbert-rommet som består av tilstander med $\ell = 1$, $s = \frac{1}{2}$, så gjelder fullstendighetsrelasjonene

$$I = \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} \sum_{m_s=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |m_\ell, m_s\rangle\langle m_\ell, m_s| = \sum_{j=\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sum_{m_j=-j}^{j} |j, m_j\rangle\langle j, m_j| \; .$$

Ved hjelp av dem kan vi skrive tilstandene $|j, m_j\rangle$ som lineærkombinasjoner av tilstandene $|m_\ell, m_s\rangle$,

$$|j, m_j\rangle = I\,|j, m_j\rangle = \sum_{m_\ell, m_s} |m_\ell, m_s\rangle\langle m_\ell, m_s|j, m_j\rangle \; ,$$

eller den andre veien,

$$|m_\ell, m_s\rangle = I\,|m_\ell, m_s\rangle = \sum_{j, m_j} |j, m_j\rangle\langle j, m_j|m_\ell, m_s\rangle \; .$$

Slike formler gjelder selvfølgelig mye mer generelt enn akkurat i vårt eksempel her med banedreieimpuls 1 og spinn $\frac{1}{2}$.

Koeffisientene $\langle m_\ell, m_s|j, m_j\rangle$ og $\langle j, m_j|m_\ell, m_s\rangle$ som opptrer her, og i mer generelle eksempler, kalles *Clebsch–Gordan-koeffisienter* (Gordan med Clebsch–Gordan-koeffisientene er en annen person enn Gordon med Klein–Gordon-ligningen). De er nyttige i mange sammenhenger, og som seg hør og bør, finnes det tabeller som en kan slå opp i når en trenger dem. Standard konvensjon sier at de velges reelle, og det har blant annet den fordelen at en ikke behøver å bekymre seg om hvilken vei en skal snu skalarproduktet:

$$\langle m_\ell, m_s|j, m_j\rangle = \langle j, m_j|m_\ell, m_s\rangle^* = \langle j, m_j|m_\ell, m_s\rangle \; .$$