Øving 2 for FY1004, høsten 2007

Kepler-problemet (I)

Både Rutherfords formel for spredning av α-partikler og Bohrs atommodell baserer seg på løsningen av det nå 400 år gamle Kepler-problemet for planetbaner i solsystemet. Dette problemet fra klassisk mekanikk gjelder bevegelsen til en punktpartikkel i et kraftfelt der kraften er omvendt proporsjonal med kvadratet av avstanden fra et fast sentrum og peker rett inn mot, eller rett bort fra, det samme sentret.

En partikkel med masse m har posisjonen

$$\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \ ,$$

der $\vec{\imath} = \vec{e}_x$, $\vec{\jmath} = \vec{e}_y$ og $\vec{k} = \vec{e}_z$ er tre faste ortogonale enhetsvektorer. Posisjonen avhenger av tiden t, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Hastigheten $\vec{v}$ og akselerasjonen $\vec{a}$ er henholdsvis første og andre tidsderiverte av posisjonen,

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \ , \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \ .$$

Impulsen (også kalt bevegelsesmengden) til partikkelen defineres som $\vec{p} = m\vec{v}$, i det ikke-relativistiske tilfellet. I det relativistiske tilfellet, når hastigheten $v = |\vec{v}|$ nærmer seg lyshastigheten c, defineres

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \ ,$$

men her regner vi med det ikke-relativistiske uttrykket. Dreieimpulsen defineres som

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m\,\vec{r} \times \vec{v} \ .$$

Den er en vektor som er ortogonal til både $\vec{r}$ og $\vec{p}$.

Den klassiske bevegelsesligningen til partikkelen er Newtons 2. lov:

$$\vec{K} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \ ,$$

der $\vec{K}$ er kraften som virker på partikkelen.

I Kepler-problemet er kraften gitt som

$$\vec{K} = \frac{k}{r^3}\,\vec{r} \ ,$$

der k er en konstant, og

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ .$$

Kraften er rettet inn mot origo hvis $k < 0$, og bort fra origo hvis $k > 0$. Og den er omvendt proporsjonal med kvadratet av avstanden til origo,

$$K = |\vec{K}| = \frac{|k|}{r^3}\,|\vec{r}| = \frac{|k|}{r^2} \ .$$

For en planet i tyngdefeltet fra Sola er $k = -GMm < 0$, der G er Newtons gravitasjonskonstant og M er massen til Sola. For et elektron med ladning $q_1 = -e$, der $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C er elementærladningen, eller for en α-partikkel med ladning $q_1 = 2e$, i Coulomb-feltet fra en atomkjerne med atomnummer Z og ladning $q_2 = Ze$, er

$$k = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \ ,$$

der $\epsilon_0 = 8{,}854\ 10^{-12}\ \mathrm{C}^2\ \mathrm{N}^{-1}\ \mathrm{m}^{-2}$ er en naturkonstant som kalles permittiviteten til vakuum.

a) Skriv ut eksplisitte uttrykk for de tre komponentene L_x, L_y og L_z til dreieimpulsen $\vec{L}$. (Hvis du tviler på at $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ og $\vec{p} \cdot \vec{L} = 0$, så sjekk ved eksplisitt utregning at det stemmer!)

b) Vis at $\vec{L}$ er en bevegelseskonstant i Kepler-problemet, det vil si at alle komponentene L_x, L_y og L_z er bevegelseskonstanter.

   Hint: Vis at den tidsderiverte $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$ er lik null.

De to resultatene at $\vec{L}$ er konstant og $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ viser at partikkelen beveger seg i et plan gjennom origo som er vinkelrett på $\vec{L}$ (vi antar at $\vec{L}$ ikke er null). Da er det naturlig å velge et koordinatsystem slik at, for eksempel, z-aksen peker langs $\vec{L}$ og partikkelen beveger seg i xy-planet, altså at

$$\vec{L} = L_z\,\vec{e}_z \qquad \text{med} \qquad L_z = L = |\vec{L}| \ ,$$

og

$$\vec{r} = r\,(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y) = r\,\vec{e}_r \ .$$

Vi innfører to nye enhetsvektorer i xy-planet,

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \frac{\vec{r}}{r} = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \ , \\
\vec{e}_\varphi &= \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \ .
\end{aligned}$$

c) Vis at $\vec{e}_r$ og $\vec{e}_\varphi$ er ortogonale, og at $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$ (husk at $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \vec{e}_z$).

d) Vis at

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_r + r\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi \ ,$$

   og at

$$L_z = mr^2\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \ .$$

   Den siste ligningen er spesielt nyttig fordi vi allerede vet at L_z er konstant.

e) Vis at

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L_z^2}{m^2 r^2} \ .$$

   Denne formelen betyr at vi kan redusere det opprinnelige tredimensjonale problemet til et ekvivalent endimensjonalt problem, der vi står igjen med bare radialkoordinaten r.