Øving 3 for FY1004, høsten 2007 (fortsetning av øving 2)

Kepler-problemet (II)

a) Bruk bevegelsesloven

$$m\vec{a} = \frac{k}{r^3}\,\vec{r}$$

til å vise at den totale energien, definert som kinetisk energi pluss potensiell energi:

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{k}{r}\;,$$

er konstant.

Hint: Vis at $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Tidsderivasjon av ligningene $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$ og $r^2 = \vec{r}\cdot\vec{r}$ gir at

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}t} = 2\,\vec{v}\cdot\vec{a} \qquad \text{og} \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{r}\;.$$

b) Ligningen fra oppgave 2e),

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L_z^2}{m^2r^2}\;,$$

der L_z er konstant, gir følgende uttrykk for energien,

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{r}\;.$$

For å løse Kepler-problemet bruker vi nå enda to knep. For det første ser vi på r som en funksjon av vinkelen φ istedenfor som en funksjon av t, det gir at

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{L_z}{mr^2}\;.$$

Dernest innfører vi en ny variabel $u = 1/r$.

Vis at

$$E = \frac{L_z^2}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + u^2\right] + ku\;.$$

Deriver denne ligningen med hensyn på φ, husk at E er konstant, og utled dermed bevegelsesligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u + \frac{km}{L_z^2} = 0\;.$$

c) Etter at vi har omskrevet bevegelsesligningen så mye som dette, kan den løses enkelt. Den generelle løsningen er

$$u = u_0\left[1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\right] \qquad \text{med} \qquad u_0 = -\frac{km}{L_z^2}\;,$$

som inneholder to integrasjonskonstanter ϵ og φ_0 (to konstanter fordi ligningen er en andre-ordens ordinær differensialligning). Konstanten ϵ kalles eksentrisitet, og vi kan alltid velge $\epsilon \geq 0$ (løsningen er uforandret om vi bytter fortegn på ϵ samtidig som vi øker φ_0 med π). Den samme løsningen kan også skrives slik:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left[1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\right] \qquad \text{med} \qquad r_0 = \frac{1}{u_0} = -\frac{L_z^{\,2}}{km}\ .$$

Vis at energien for denne banen er

$$E = \frac{k^2 m(\epsilon^2 - 1)}{2L_z^{\,2}}\ .$$

Vi ser at $E < 0$ for $\epsilon < 1$, $E = 0$ for $\epsilon = 1$ og $E > 0$ for $\epsilon > 1$.

For et elektron i et Bohr-atom er

$$k = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} < 0\ , \qquad \text{slik at} \qquad r_0 = -\frac{L_z^{\,2}}{km} > 0\ .$$

Da finnes det en løsning med eksentrisitet $\epsilon = 0$ og $r = r_0 =$ konstant, som altså er en sirkelbane. Energien for sirkelbanen er

$$E = -\frac{k^2 m}{2L_z^{\,2}} = \frac{k u_0}{2} = \frac{k}{2r_0}\ ,$$

som er nøyaktig halvparten av den potensielle energien k/r_0.

For Rutherfords α-partikkel som spres mot en atomkjerne med elektrisk ladning Ze er

$$k = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} > 0\ ,$$

slik at $u_0 < 0$ og $r_0 < 0$. Siden

$$u = u_0\left[1 + \epsilon\cos(\varphi - \varphi_0)\right] \geq 0\ ,$$

må vi ha eksentrisitet $\epsilon > 1$ og følgelig energi $E > 0$, og dessuten må

$$\cos(\varphi - \varphi_0) \leq -\frac{1}{\epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2EL_z^{\,2}}{k^2 m}}}\ .$$

Den siste ulikheten betyr at

$$\pi - \varphi_1 \leq \varphi - \varphi_0 \leq \pi + \varphi_1\ ,$$

der

$$\varphi_1 = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2EL_z^{\,2}}{k^2 m}}}\ .$$

For $\varphi - \varphi_0 = \pi \pm \varphi_1$ er $u = 0$ og $r = 1/u = \infty$.

d) En α-partikkel spres mot en atomkjerne med ladning Ze som ligger i ro i origo. α-partikkelen har en gitt energi $E > 0$ og en gitt absoluttverdi $L = |\vec{L}|$ av dreieimpulsen $\vec{L}$ (ovenfor har vi regnet på bevegelse i xy-planet, slik at $L = |L_z|$).

Hva blir spredningsvinkelen?

Spredningsvinkelen ϕ defineres slik at $\phi = 0$ hvis α-partikkelen ikke forandrer retning.