Øving 5 for FY1004, høsten 2007

Et lynkurs i lineær algebra

En $m \times n$-matrise A har m rader og n søyler:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} .$$

Matriseelementene A_{ij} er komplekse tall. Speiling om hoveddiagonalen gir den *transponerte* matrisen A^T, som er en $n \times m$-matrise med matriseelementene $(A^T)_{ij} = A_{ji}$,

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} .$$

Samtidig transponering og komplekskonjugering av A gir den *hermitesk konjugerte* matrisen $A^\dagger$, som også er en $n \times m$-matrise, med matriseelementene $(A^\dagger)_{ij} = (A_{ji})^* \equiv A^*_{ji}$,

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} A^*_{11} & A^*_{21} & \dots & A^*_{m1} \\ A^*_{12} & A^*_{22} & \dots & A^*_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^*_{1n} & A^*_{2n} & \dots & A^*_{mn} \end{pmatrix} .$$

En $n \times n$-matrise (kvadratisk matrise) A er *symmetrisk* dersom $A^T = A$, og er *hermitesk* dersom $A^\dagger = A$.

Matriseproduktet av en $m \times n$-matrise A og en $n \times p$-matrise B er en $m \times p$-matrise AB med matriseelementene

$$(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} .$$

Hver rad i A multipliseres med hver søyle i B.

Identitetsmatrisen $I = I_n$ er $n \times n$-matrisen med matriseelementer $I_{ij} = \delta_{ij} = 1$ hvis $i = j$, 0 hvis $i \neq j$. For enhver $m \times n$-matrise A gjelder at $I_m A = A I_n = A$.

Egenverdiligningen til en $n \times n$-matrise A er ligningen $A\psi = \lambda\psi$, der λ er et komplekst tall og ψ er en *vektor*, dvs. en $n \times 1$-matrise,

$$\psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} .$$

Når egenverdiligningen er oppfylt, med $\psi \neq 0$ (dvs. at ikke alle komponentene $u_i = 0$), kalles ψ en *egenvektor* for A med *egenverdien* λ. Til en egenverdi svarer det alltid minst en egenvektor, men det kan godt hende at mer enn en egenvektor har samme egenverdi. For eksempel er alle vektorer $\psi \neq 0$ egenvektorer til enhetsmatrisen I med egenverdi 1.

Egenverdiligningen $A\psi = \lambda\psi$ kan også skrives som $(A - \lambda I)\psi = 0$. Betingelsen for at det skal eksistere minst en løsning $\psi \neq 0$, er at matrisen $A - \lambda I$ har determinant 0,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \; .$$

Når matrisene A og I har dimensjon $n \times n$, er denne ligningen en n-tegradsligning for egenverdien λ, og den kalles den *karakteristiske ligningen* til A. En n-tegradsligning har alltid n komplekse røtter, men en rot kan opptre mer enn en gang, i så fall sier vi at den er *degenerert.*

Nedenfor antar vi at A er en 2×2-matrise,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

a) Hvilke betingelser må matriseelementene a, b, c og d oppfylle for at A skal være hermitesk?

b) Skriv opp egenverdiligningen til A, som er en andregradsligning, og løs den.

Vis at begge egenverdiene er reelle dersom A er hermitesk.

c) Som et mer konkret eksempel, la heretter

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 + 2\mathrm{i} \\ 1 - 2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} .$$

Er A hermitesk?

d) Finn de to egenverdiene λ_1 og λ_2, og de tilhørende egenvektorene

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} , \qquad \psi_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} .$$

En gitt egenvektor kan alltid *normeres* forskjellig ved at den multipliseres med en kompleks konstant. Velg normeringen av ψ_1 og ψ_2 slik at

$$\psi_1^\dagger \psi_1 = |u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 = 1 \; , \qquad \psi_2^\dagger \psi_2 = |u_{21}|^2 + |u_{22}|^2 = 1 \; .$$

e) Vis at egenvektorene er ortogonale, det vil si at $\psi_1^\dagger \psi_2 = 0$.

f) Matriseproduktene $\psi_1 \psi_1^\dagger$ og $\psi_2 \psi_2^\dagger$ er 2×2-matriser. Vis at de er hermiteske, og at

$$\psi_1 \psi_1^\dagger + \psi_2 \psi_2^\dagger = I \; ,$$

og at

$$\lambda_1 \, \psi_1 \psi_1^\dagger + \lambda_2 \, \psi_2 \psi_2^\dagger = A \; .$$

Mengden av alle egenverdiene til en matrise kalles *spektret* til matrisen, og den siste ligningen er *spektralrepresentasjonen* til A. Enhver hermitesk $n \times n$-matrise har en slik spektralrepresentasjon, med n reelle egenverdier.