Øving 6 for FY1004, høsten 2007

Gaussiske bølgepakker

a) Vis at
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}\ .$$
Hint: Bruk at
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-x^2}\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-x^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \; \mathrm{e}^{-y^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \; \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\ ,$$
og beregn dobbeltintegralet ved å transformere til polarkoordinater i planet.

Det kan også vises (beviset forlanges ikke her) at for en vilkårlig reell konstant a er
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}a)^2} = \sqrt{\pi}$$

b) En partikkel har masse m og beveger seg i en dimensjon, slik at posisjonen er gitt ved en koordinat x. Bølgefunksjonen $\psi(x)$ tolkes slik at $|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x$ er den infinitesimale sannsynligheten for å finne partikkelen mellom x og $x + \mathrm{d}x$.

I det følgende setter vi
$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\ \sqrt[4]{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}\ , \tag{1}$$
der σ er en positiv konstant. Vis at den totale sannsynligheten er lik 1, dvs. at
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; |\psi(x)|^2 = 1.$$
Beregn forventningsverdien av x, definert som
$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; x\,|\psi(x)|^2\ ,$$
og variansen av x, definert som
$$\mathrm{var}(x) = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2\ .$$
Vi definerer usikkerheten i x, Δx, ved at $\mathrm{var}(x) = (\Delta x)^2$.

c) Den Fourier-transformerte bølgefunksjonen
$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\psi(x)$$
er en funksjon av bølgetallet k. Når vi setter inn $\psi(x)$ fra ligning (1), får vi at
$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{\sigma}\ \sqrt[4]{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx-\frac{x^2}{4\sigma^2}}\ .$$

Vi kan løse integralet ved hjelp av formlene fra punkt a), og ved hjelp av følgende omskriving av eksponenten:

$$-\mathrm{i}kx - \frac{x^2}{4\sigma^2} = -\frac{1}{4\sigma^2}\,(x + 2\mathrm{i}\sigma^2 k)^2 - \sigma^2 k^2 \ .$$

Vis at det gir

$$\phi(k) = \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sqrt[4]{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\sigma^2 k^2} \ .$$

Kontroller at formelen for den inverse Fourier-transformasjonen stemmer, nemlig at

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \phi(k) \ .$$

d) Vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ |\phi(k)|^2 = 1.$$

Vi tolker $|\phi(k)|^2\,\mathrm{d}k$ som sannsynligheten for at bølgetallet er mellom k og $k + \mathrm{d}k$.

Beregn forventningsverdien av k, definert som

$$\langle k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ k\,|\phi(k)|^2 \ ,$$

og variansen av k, definert som

$$\mathrm{var}(k) = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 \ .$$

Vi definerer usikkerheten i k, Δk ved at $\mathrm{var}(k) = (\Delta k)^2$.

e) Beregn $\Delta x\,\Delta k$.

Impulsen til partikkelen er $p = \hbar k$, i følge deBroglie. Beregn $\Delta x\,\Delta p$, og sammenlign med Heisenbergs usikkerhetsrelasjon,

$$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \ .$$

Kommentar?