Øving 9 for FY1004, høsten 2007

Vi vil bevise Heisenbergs usikkerhetsrelasjon,

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \; .$$

Den gjelder for en partikkel i en dimensjon, i en vilkårlig kvantemekanisk tilstand gitt ved en bølgefunksjon $\psi = \psi(x)$, når x er posisjonen og p impulsen til partikkelen. Impulsoperatoren er

$$p = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \; .$$

Generelt defineres forventningsverdien av en operator A i tilstanden ψ som

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \psi^* \, (A\psi) \; .$$

Usikkerheten i x, Δx, er definert som kvadratroten av variansen av x,

$$(\Delta x)^2 = \mathrm{var}(x) = \Big\langle (x - \langle x \rangle)^2 \Big\rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \; .$$

Tilsvarende defineres usikkerheten i p ved at

$$(\Delta p)^2 = \mathrm{var}(p) = \Big\langle (p - \langle p \rangle)^2 \Big\rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 \; .$$

Utgangspunktet for å bevise Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er at for enhver operator A, enten den er Hermitesk eller ikke, er forventningsverdien av $A^\dagger A$ alltid ikke-negativ,

$$\langle A^\dagger A \rangle \geq 0 \; .$$

Den Hermitesk konjugerte $A^\dagger$ av operatoren A defineres ved at for alle bølgefunksjoner ψ_1 og ψ_2 skal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; (\psi_1)^* \, (A\psi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; (A^\dagger \psi_1)^* \, \psi_2 \; .$$

Definisjonen gir bl.a. at $(A^\dagger)^\dagger = A$. Bevis for at $\langle A^\dagger A \rangle \geq 0$ i en vilkårlig tilstand ψ:

$$\begin{aligned} \langle A^\dagger A \rangle \; &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \psi^* \, (A^\dagger A \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \psi^* \, (A^\dagger (A\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; ((A^\dagger)^\dagger \psi)^* \, (A\psi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; (A\psi)^* \, (A\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; |A\psi|^2 \geq 0 \; . \end{aligned}$$

En operator A er Hermitesk hvis $A^\dagger = A$.

Nå vil vi bruke ulikheten $\langle A^\dagger A \rangle \geq 0$ for den spesielle operatoren

$$A = x + \mathrm{i}\alpha \, p + (\beta + \mathrm{i}\gamma) \, I \; ,$$

der α, β og γ er reelle konstanter, og I er identitetsoperatoren. Den Hermitesk konjugerte av A er

$$A^\dagger = x - \mathrm{i}\alpha \, p + (\beta - \mathrm{i}\gamma) \, I \; ,$$

når vi bruker at x, p og I er Hermiteske operatorer.

a) Konstantene α, β og γ må være dimensjonerte størrelser. Hvilke dimensjoner må de ha?

b) Vis at

$$A^\dagger A = x^2 + \alpha^2 p^2 + (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\hbar)\, I + 2\beta\, x + 2\alpha\gamma\, p \; .$$

Hint: For en vilkårlig operator B gjelder at $BI = IB = B$.
Du trenger også den kanoniske kommutasjonsrelasjonen

$$[x, p] \equiv xp - px = \mathrm{i}\hbar\, I \; ,$$

som bevises slik: For en vilkårlig bølgefunksjon ψ er

$$\begin{aligned}(xp - px)\psi \;&=\; xp\psi - px\psi = x(p\psi) - p(x\psi) = x\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\psi\right) - \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(x\psi) \\ &= \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,(x\psi' - (\psi + x\psi')) = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\psi = \mathrm{i}\hbar\,\psi \; .\end{aligned}$$

c) Ved å ta forventningsverdien i en vilkårlig tilstand ψ får vi nå ulikheten

$$0 \le \langle A^\dagger A\rangle = \langle x^2\rangle + \alpha^2\,\langle p^2\rangle + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\hbar + 2\beta\,\langle x\rangle + 2\alpha\gamma\,\langle p\rangle \; .$$

Husk at $\langle I\rangle = 1$. Denne ulikheten gjelder for alle verdier av konstantene α, β og γ. For å utnytte ulikheten best mulig, bør vi velge α, β og γ slik at høyresiden blir minimal.

Først kan vi holde α konstant og velge β og γ slik at vi minimaliserer høyresiden for denne gitte verdien av α.
Vis at vi må velge $\beta = -\langle x\rangle$ og $\gamma = -\alpha\,\langle p\rangle$, og at det gir ulikheten

$$0 \le \langle x^2\rangle + \alpha^2\,\langle p^2\rangle - \langle x\rangle^2 - \alpha^2\,\langle p\rangle^2 - \alpha\hbar = (\Delta x)^2 + \alpha^2\,(\Delta p)^2 - \alpha\hbar \; ,$$

som gjelder for alle verdier av α.

Vis at vi minimaliserer det siste uttrykket ved å velge

$$\alpha = \frac{\hbar}{2\,(\Delta p)^2} \; ,$$

og at det gir ulikheten

$$0 \le (\Delta x)^2 - \frac{\hbar^2}{4\,(\Delta p)^2} \; .$$

Denne ulikheten kan skrives slik:

$$(\Delta x)^2\,(\Delta p)^2 \ge \frac{\hbar^2}{4} \; .$$

Når vi så trekker ut kvadratroten, har vi Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.

d) Heisenbergs usikkerhetsrelasjon gjelder for en vilkårlig tilstand ψ.
Vis at for grunntilstanden til en endimensjonal harmonisk oscillator,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}\,\sqrt[4]{\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\ ,$$

der ℓ er en karakteristisk lengde for oscillatoren, $\ell = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$, der m er massen og ω den klassiske vinkelfrekvensen, gjelder usikkerhetsrelasjonen som en *likhet*,

$$\Delta x\,\Delta p = \frac{\hbar}{2}\ .$$

Et par nyttige integral (der μ er en positiv konstant):

$$I_0(\mu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\mu x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\mu}}\ , \qquad I_2(\mu) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x^2\,\mathrm{e}^{-\mu x^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\,I_0(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu^{3/2}}\ .$$

Hvorfor er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ x\,\mathrm{e}^{-\mu x^2} = 0\ ?$$

e) Når den kvantemekaniske tilstanden til en partikkel i en dimensjon oppfyller usikkerhetsrelasjonen som en likhet, kalles den en *minimum usikkerhetstilstand*.

I klassisk fysikk kan en partikkel samtidig ha både skarpt definert posisjon og skarpt definert impuls. Minimum usikkerhetstilstandene er de kvantemekaniske tilstandene som ligner mest på klassiske tilstander.

Vi kan bruke operatoren

$$A = x + \mathrm{i}\alpha\,p + (\beta + \mathrm{i}\gamma)\,I = x + \alpha\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + (\beta + \mathrm{i}\gamma)\,I$$

til å finne en minimum usikkerhetstilstand. Idéen er å finne en tilstand ψ som gjør ulikheten $\langle A^\dagger A\rangle \geq 0$ til en likhet, altså der

$$0 = \langle A^\dagger A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi^*\,(A^\dagger A\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ |A\psi|^2\ .$$

Den eneste måten det siste integralet kan bli null på, er at integranden $|A\psi|^2$ er identisk lik 0. Men det betyr at $A\psi = 0$, altså at bølgefunksjonen $\psi = \psi(x)$ oppfyller den førsteordens differensialligningen

$$x\psi(x) + \alpha\hbar\,\psi'(x) + (\beta + \mathrm{i}\gamma)\,\psi(x) = 0\ .$$

Løs denne ligningen for $\psi(x)$, når α, β og γ er vilkårlige reelle konstanter.

Anta at $\alpha > 0$. Hva går galt hvis $\alpha < 0$?