Øving 10 for FY1004, høsten 2007

Hamiltonoperatoren for en endimensjonal harmonisk oscillator er

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\omega^2 x^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}\,m\omega^2 x^2 \;.$$

m er massen til partikkelen, x er posisjonen, p er impulsen, og ω er vinkelfrekvensen til oscillatoren. Størrelsen

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

er en karakteristisk lengde for oscillatoren. Vi innfører operatoren

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} + \frac{\mathrm{i}\ell}{\hbar}\,p\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} + \ell\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right).$$

Siden operatorene x og p er Hermiteske, $x^\dagger = x$ og $p^\dagger = p$, er

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} - \frac{\mathrm{i}\ell}{\hbar}\,p\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} - \ell\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right).$$

Den kanoniske kommutasjonsrelasjonen

$$[x,p] = xp - px = \mathrm{i}\hbar\, I$$

som vi gjerne skriver slik: $[x,p] = \mathrm{i}\hbar$, gir at

$$[a,a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = I \;,$$

som vi gjerne skriver slik: $[a,a^\dagger] = 1$.

Hamiltonoperatoren kan uttrykkes ved operatorene a og $a^\dagger$ som

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \;,$$

idet vi definerer $N = a^\dagger a$. Operatoren N kan kalles en *antallsoperator*, av grunner som blir åpenbare når vi resonnerer oss fram til hvilke egenverdier den kan ha.

a) Vis at operatorene $a^\dagger a$ og $aa^\dagger$ begge er Hermiteske.
Hvorfor kan de ikke ha negative egenverdier?

Hint: Se øving 9.
Vis f.eks. generelt for to operatorer A og B at $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, og at $(A^\dagger)^\dagger = A$.

b) I det følgende antar vi at vi har gitt en egentilstand ψ_k til N med egenverdi k. Vi antar altså at

$$N\psi_k = k\psi_k \;.$$

Bruk kommutasjonsrelasjonen $[a,a^\dagger] = 1$ til å vise at ψ_k er en egentilstand for $aa^\dagger$.
Hva er egenverdien?

c) Vis kommutasjonsrelasjonene

$$[a, N] = a \ , \qquad [a^\dagger, N] = -a^\dagger \ .$$

Bruk dem til å vise at $a^\dagger \psi_k$ er en egentilstand for N med egenverdi $k+1$, og at $a\psi_k$ er en egentilstand for N med egenverdi $k-1$.

d) Vis at hvis ψ_k er normert, slik at

$$\langle \psi_k \, , \, \psi_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \psi_k^* \, \psi_k = 1 \ ,$$

så er ψ_{k+1} og ψ_{k-1} normerte når vi definerer

$$\psi_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \, a^\dagger \psi_k \ , \qquad \psi_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}} \, a\psi_k \ .$$

På tilsvarende måte definerer vi

$$\begin{aligned} \psi_{k+2} &= \frac{1}{\sqrt{k+2}} \, a^\dagger \psi_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \, (a^\dagger)^2 \psi_k \ , \\ \psi_{k-2} &= \frac{1}{\sqrt{k-1}} \, a\psi_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} \, a^2 \psi_k \ . \end{aligned}$$

Og så videre. Alle ψ_n med $n = k, k \pm 1, k \pm 2, \ldots$ er da normerte egentilstander for N, med

$$N\psi_n = n\psi_n \ , \qquad a^\dagger \psi_n = \sqrt{n+1} \, \psi_{n+1} \ , \qquad a\psi_n = \sqrt{n} \, \psi_{n-1} \ .$$

Men vi må ta forbehold om at N ikke kan ha negative egenverdier. Den eneste måten det kan unngås på, er at en av tilstandene ψ_n har den egenskapen at

$$a\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\ell} + \ell \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right) \psi_n = 0 \ , \qquad N\psi_n = (a^\dagger a)\psi_n = a^\dagger (a\psi_n) = 0 \ .$$

For denne tilstanden er altså $n = 0$, og dette er grunntilstanden til den harmoniske oscillatoren. Den normerte grunntilstanden er

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell} \, \sqrt[4]{\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}} = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \, \mathrm{e}^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \ .$$

e) Vis at energiegentilstandene til den harmoniske oscillatoren, for $n = 0, 1, 2, \ldots$, er

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \, n! \, \ell \, \sqrt[4]{\pi}}} \, H_n\!\left(\frac{x}{\ell} \right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}} \ ,$$

der H_n er det n-te Hermite-polynomet, definert ved at $H_0(u) = 1$ og

$$H_{n+1}(u) = 2u \, H_n(u) - H_n'(u) \ .$$

Finn eksplisitte uttrykk for Hermite-polynomene H_1, H_2, H_3 og H_4.