Øving 12 for FY1004, høsten 2007

Reduksjon av topartikkelproblemet

To partikler med masser m_1 og m_2 har posisjoner $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$. Vi antar at den potensielle energien V er en funksjon bare av den relative posisjonen $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, altså at $V = V(\vec{r}) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

Klassisk mekanikk

I følge klassisk mekanikk påvirkes partikkel 1 av en kraft $\vec{F}_1 = -\nabla_1 V$ og partikkel 2 av en kraft $\vec{F}_2 = -\nabla_2 V$, der ∇_1 og ∇_2 er gradientoperatorene med hensyn på henholdsvis $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$. Når $V = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, så er $\vec{F}_1 = -\nabla V$ og $\vec{F}_2 = +\nabla V$, der ∇ gradientoperatoren med hensyn på $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Altså er $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, som er Newtons tredje lov.

Partikkel nr. j har hastighet $\vec{v}_j = \mathrm{d}\vec{r}_j/\mathrm{d}t$ og impuls $\vec{p}_j = m_j\vec{v}_j$, og i følge Newtons andre lov er de tidsderiverte av impulsene lik kreftene,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_2 \,.$$

Newtons tredje lov impliserer at den totale impulsen $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ er en bevegelseskonstant,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = 0 \,.$$

Det betyr at massesenteret

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

beveger seg med en hastighet $\vec{V} = \mathrm{d}\vec{R}/\mathrm{d}t$ som er konstant. Når vi definerer $M = m_1 + m_2$, har vi nemlig at $\vec{P} = M\vec{V}$.

Istedenfor partikkelposisjonene $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ kan vi bruke massesenterposisjonen $\vec{R}$ og den relative posisjonen $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ til å beskrive topartikkelsystemet. Tilsvarende bruker vi massesenterhastigheten $\vec{V} = \mathrm{d}\vec{R}/\mathrm{d}t$ og den relative hastigheten $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

a) Vis at den totale energien,

$$E = \frac{1}{2}\,m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}\,m_2\vec{v}_2^{\,2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \,,$$

også kan skrives slik:

$$E = \frac{1}{2}\,M\vec{V}^{\,2} + \frac{1}{2}\,m\vec{v}^{\,2} + V(\vec{r}) \,,$$

når vi innfører den *reduserte massen* $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$. Definisjonen kan også skrives slik:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \,.$$

b) Vi definerer den relative impulsen som $\vec{p} = m\vec{v}$, der m er den reduserte massen og $\vec{v}$ den relative hastigheten. Vis at

$$\vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1 + m_2} \,,$$

og at

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = -\nabla V \,.$$

Dermed har vi redusert topartikkelproblemet til to uavhengige enpartikkelproblem. Den ene «partikkelen» har masse M og posisjon $\vec{R}$, som er massesenterposisjonen, mens den andre «partikkelen» har masse m, posisjon $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ og potensiell energi $V(\vec{r})$.

Kvantemekanikk

Den samme reduksjonen fra et topartikkelproblem til to uavhengige enpartikkelproblem kan vi gjøre i kvantemekanikken. Da definerer vi på samme måte

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \;, \qquad \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \;, \qquad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \;, \qquad \vec{p} = \frac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1 + m_2} \;,$$

samt $M = m_1 + m_2$ og $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

Her må vi tolke $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{p}_1$ og $\vec{p}_2$ som operatorer. De opererer på bølgefunksjoner som er funksjoner av 6 variable,

$$\psi = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \;.$$

Spesielt er impulsoperatorene definert ved gradientoperatorene,

$$\vec{p}_1 = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\nabla_1 \;, \qquad \vec{p}_2 = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\nabla_2 \;.$$

Følgende kommutatorer mellom koordinater og impulskomponenter er ikke lik null:

$$[x_1, p_{1x}] = [y_1, p_{1y}] = [z_1, p_{1z}] = [x_2, p_{2x}] = [y_2, p_{2y}] = [z_2, p_{2z}] = \mathrm{i}\hbar \;.$$

Alle andre kommutatorer er lik null, for eksempel

$$[x_1, y_1] = [x_1, x_2] = [x_1, p_{1y}] = [x_1, p_{2x}] = \ldots = 0 \;.$$

c) Vis at det gjelder tilsvarende kommutasjonsrelasjoner for operatorene $\vec{R}$, $\vec{P}$, $\vec{r}$ og $\vec{p}$ som for operatorene $\vec{r}_1$, $\vec{p}_1$, $\vec{r}_2$ og $\vec{p}_2$, nemlig

$$[X, P_x] = [Y, P_y] = [Z, P_z] = [x, p_x] = [y, p_y] = [z, p_z] = \mathrm{i}\hbar \;.$$

Mens alle andre kommutatorer er lik null.

d) Hamiltonoperatoren for topartikkelsystemet er

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \;.$$

Vis at

$$H = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r}) \;.$$

e) Den totale dreieimpulsen er

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \;.$$

Er

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{p}\,?$$