Øving 16 for FY1004, våren 2008

Den komplekse 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

er hermitesk dersom diagonalelementene A_{11} og A_{22} er reelle, og dessuten $A_{21} = (A_{12})^*$. I denne oppgaven antar vi at A er en hermitesk 2×2-matrise, og vi innfører fire reelle parametre, som vi her velger å kalle t, x, y, z, slik at

$$A = \begin{pmatrix} t+z & x-\mathrm{i}y \\ x+\mathrm{i}y & t-z \end{pmatrix}.$$

a) Uttrykk parametrene t, x, y, z ved matriseelementene $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$.

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til A uttrykt ved t, x, y, z.

Når vi innfører identitetsmatrisen I og de tre såkalte Pauli-matrisene $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ og $\sigma_z = \sigma_3$, definert ved at

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kan vi skrive

$$A = tI + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = tI + \vec{r}\cdot\vec{\sigma} = tI + r\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\ .$$

Vi ser da på x, y, z som de tre komponentene av en vektor $\vec{r}$, og på $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ som de tre komponentene av en vektor $\vec{\sigma}$. Vi definerer $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ og $\vec{n} = \vec{r}/r$.

c) Vis at fordi $\vec{n}$ er en enhetsvektor, $\vec{n}\cdot\vec{n} = 1$, er $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = I$.
Hva forteller det om egenverdiene til matrisene $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ og $A = tI + r\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$?

d) Uttrykk matrisen $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ ved polarvinklene θ, φ, som vi definerer ved at

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi\ , \qquad y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi\ , \qquad z = r\,\cos\theta\ .$$

En vektor i det todimensjonale komplekse vektorrommet $\mathbf{C}^2$,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

altså en 2×1-matrise, kalles gjerne en *spinor* i kvantemekanisk sammenheng.

e) Vis at spinorene

$$u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

er egenvektorer til matrisen $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, og finn de tilhørende egenverdiene.

Hermitesk konjugering (transponering og komplekskonjugering) av spinoren ψ gir 1×2-matrisen

$$\psi^\dagger = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{pmatrix} .$$

$\mathbf{C}^2$ er et Hilbert-rom, med skalarproduktet mellom to spinorer ψ og ϕ definert som

$$\langle \psi, \phi \rangle = \psi^\dagger \phi = \psi_1^* \phi_1 + \psi_2^* \phi_2 \ .$$

Normen av ψ skrives $||\psi||$ og defineres ved at

$$||\psi||^2 = \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \ .$$

Når vi normerer spinoren ψ til 1 (dvs. at $\psi^\dagger\psi = 1$), kan den representere en kvantemekanisk tilstand i et fysisk system av den typen som kalles et *to-nivå-system.* Alle observable i et to-nivå-system, som for eksempel Hamilton-funksjonen, representeres ved hermiteske 2×2-matriser, og har nøyaktig to egentilstander. Unntaket er identitetsmatrisen I, som ikke gjør forskjell på vektorene i Hilbert-rommet, idet den har alle som egenvektorer med egenverdi 1.

f) Forventningsverdien til observabelen A i tilstanden ψ er som vanlig definert som

$$\langle A \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle = \psi^\dagger A \psi \ .$$

La $\vec{w} = \langle \vec{\sigma} \rangle$, det vil si at $\vec{w}$ er en vektor med komponenter $w_x = \langle \sigma_x \rangle$, $w_y = \langle \sigma_y \rangle$, $w_z = \langle \sigma_z \rangle$.

Vis at når ψ er normert, er $\vec{w}$ en enhetsvektor.

Vis også at ψ er en egenvektor for $\vec{w} \cdot \vec{\sigma}$ med egenverdi 1.

g) Definer

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_x \ , \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_y \ , \qquad S_z = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_z \ ,$$

og vis at disse matrisene oppfyller kommutasjonsrelasjonene for dreieimpuls:

$$[S_x, S_y] = \mathrm{i}\hbar S_z \ , \qquad [S_y, S_z] = \mathrm{i}\hbar S_x \ , \qquad [S_z, S_x] = \mathrm{i}\hbar S_y \ .$$

Vis også at

$$\vec{S}^{\,2} = {S_x}^2 + {S_y}^2 + {S_z}^2 = \frac{3}{4}\,\hbar^2 = s(s+1)\hbar^2$$

med $s = 1/2$.

Spinn-matrisene $\vec{S}$ kan representere spinnet (egenspinnet) til et elektron eller en annen partikkel med spinn 1/2. Måling av spinnkomponenten $\vec{n} \cdot \vec{S}$ langs en vilkårlig retning (enhetsvektor) $\vec{n}$ gir alltid en av to mulige verdier, enten $\hbar/2$, «spinn opp», eller $-\hbar/2$, «spinn ned».

For en vilkårlig retning $\vec{n}$ finnes det en entydig egentilstand (egenspinor) ψ med spinn opp i denne retningen. Og omvendt, for enhver spinor ψ finnes det en entydig retning $\vec{n} = \langle \vec{\sigma} \rangle = \psi^\dagger \vec{\sigma} \psi$ som har ψ som egentilstand med spinn opp.

Et godt råd er å glemme begrepet «space quantization» som innføres i læreboka (tittelen på avsnitt 8.3). Det er uforståelig at dette forvirrende begrepet overlever i moderne lærebøker i kvantemekanikk. Den forestillingen at dreieimpuls og spinn bare kan peke i diskrete, kvantiserte, retninger, er fullstendig misforstått. Her har vi vist det motsatte, at spinnet til et elektron kan peke i vilkårlige retninger!

Glem også så fort som mulig de mange figurene som illustrerer «space quantization», for eksempel figurene 8.7 og 9.8.