Øving 17 for FY1004, våren 2008

Her skal vi se på hvordan spinnet (egenspinnet) til et elektron påvirkes av et (konstant) magnetfelt $\vec{B}$. Merk: Det korrekte navnet på $\vec{B}$ er *magnetisk flukstetthet*, og når vi har et magnetfelt i vakuum, er det strengt tatt $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ som er *magnetfeltet*. Men vi bruker ofte språket litt upresist, og sier at vi har et magnetfelt $\vec{B}$.

Spinnet til elektronet kan vi representere i kvantemekanikken som en vektor

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}\ ,$$

der de tre komponentene av vektoren $\vec{\sigma}$ er de tre Pauli-matrisene

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fordi elektronet har elektrisk ladning $q = -e$ og roterer (spinner) om sin egen akse, har det et magnetisk moment

$$\vec{\mu} = g\,\frac{q}{2m}\,\vec{S} = -g\,\frac{e}{2m}\,\vec{S} = -g\,\frac{e\hbar}{4m}\,\vec{\sigma}\ .$$

Her er m elektronmassen, $q/(2m)$ kalles det gyromagnetiske forholdet, og tallet $g = 2{,}00233$ er den gyromagnetiske faktoren for elektronet.

Det magnetiske momentet $\vec{\mu}$ i magnetfeltet $\vec{B}$ har en potensiell energi $-\vec{\mu}\cdot\vec{B}$. Hvis vi bare ser på spinnet til elektronet, så er Hamilton-operatoren H lik den potensielle energien,

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = g\,\frac{e\hbar}{4m}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = \hbar\omega\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}\ ,$$

der $\vec{u}$ er enhetsvektoren i retning langs $\vec{B}$, det vil si at $\vec{B} = B\vec{u}$ med $B = |\vec{B}|$, og der

$$\omega = \frac{geB}{4m}\ .$$

Tilstanden til elektronspinnet beskrives av en spinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

som er tidsavhengig og oppfyller Schrödingerligningen

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = H\psi\ .$$

a) Vis at løsningen av Schrödingerligningen er

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,tH}\,\psi(0)\ .$$

Eksponensialfunksjonen av en matrise A defineres ved den vanlige rekkeutviklingen (I er identitetsmatrisen),

$$\mathrm{e}^A = I + A + \frac{1}{2!}\,A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,A^n + \cdots\ .$$

b) Vis at

$$e^{-i\omega t\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}} = \cos(\omega t)\,I - i\sin(\omega t)\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}\ .$$

Hint: Bruk rekkeutviklingene av eksponensialfunksjonen og av cosinus og sinus. Bruk også at $(\vec{u}\cdot\vec{\sigma})^2 = I$ (fordi $\vec{u}$ er en enhetsvektor).

c) Vis at når spinoren $\psi(t)$ er normert ved $t = 0$, dvs. at $(\psi(0))^\dagger\psi(0) = 1$, og når $\psi(t) = U\psi(0)$ med

$$U = U(t) = \cos(\omega t)\,I - i\sin(\omega t)\,\vec{u}\cdot\vec{\sigma}\ ,$$

så er $\psi(t)$ er normert ved et vilkårlig tidspunkt t, dvs. at $(\psi(t))^\dagger\psi(t) = 1$.

Hint: For en vilkårlig $m\times n$-matrise A og en vilkårlig $n\times p$-matrise B gjelder at $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.
Det følger at $(\psi(t))^\dagger\psi(t) = (U(t)\psi(0))^\dagger(U(t)\psi(0)) = (\psi(0))^\dagger(U(t))^\dagger U(t)\psi(0)$.
Det gjelder derfor å vise at $U^\dagger U = I$, dvs. at 2×2-matrisen $U = U(t)$ er *unitær*.

Vi viste i forrige oppgave at til en vilkårlig spinor ψ som er normert slik at $\psi^\dagger\psi = 1$, svarer det en enhetsvektor $\vec{n} = \psi^\dagger\vec{\sigma}\psi$ slik at $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\psi = \psi$. Det betyr at hvis spinntilstanden er ψ og vi måler spinnkomponenten langs enhetsvektoren $\vec{n}$, måler vi helt sikkert verdien $+\hbar/2$. En naturlig tolkning er derfor at i spinntilstanden ψ er spinnet kvantisert i retningen $\vec{n}$.

Når spinoren ψ er tidsavhengig, $\psi = \psi(t)$, så er også enhetsvektoren $\vec{n} = \psi^\dagger\vec{\sigma}\psi$ tidsavhengig:

$$\vec{n}(t) = (\psi(t))^\dagger\,\vec{\sigma}\,\psi(t) = (\psi(0))^\dagger\,(U(t))^\dagger\,\vec{\sigma}\,U(t)\,\psi(0)\ .$$

d) For å forenkle antar vi nå at magnetfeltet $\vec{B}$ peker i z-retningen (eller vi velger rett og slett z-aksen langs $\vec{B}$). Da er

$$U = U(t) = \cos(\omega t)\,I - i\sin(\omega t)\,\sigma_z\ .$$

Finn spinnretningen $\vec{n}(t)$ ved tiden t som funksjon av spinnretningen $\vec{n}(0)$ ved tiden $t = 0$.

Hint: Utled først multiplikasjonstabellen for Pauli-matrisene: $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$, osv., og se så på komponentene $n_x(t)$, $n_y(t)$ og $n_z(t)$ etter tur.

e) Beskriv med ord bevegelsen av spinnretningen $\vec{n}$.

Finnes det stasjonære tilstander, dvs. tilstander der spinnretningen er konstant?