Øving 19 for FY1004, våren 2008

Total dreieimpuls for et elektron (I)

Når elektronet har banedreieimpuls $\vec{L}$ og spinn $\vec{S}$, så har det total dreieimpulse $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

a) Alle komponentene av $\vec{L}$ kommuterer med alle komponentene av $\vec{S}$, fordi $\vec{L}$ og $\vec{S}$ er uavhengige observable. Både $\vec{L}$ og $\vec{S}$ er dreieimpulsoperatorer, i den forstand at de opppfyller kommutasjonsrelasjonene

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \;, \qquad [L_y, L_z] = i\hbar L_x \;, \qquad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \;,$$
$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \;, \qquad [S_y, S_z] = i\hbar S_x \;, \qquad [S_z, S_x] = i\hbar S_y \;.$$

Vis at også $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ er en dreieimpulsoperator. Det vil si, vis at komponentene av $\vec{J}$ oppfyller lignende kommutasjonsrelasjoner som komponentene av $\vec{L}$ og $\vec{S}$.

b) Vi vet (fra teorien for dreieimpulsoperatorer i alminnelighet, eller ved direkte utregning) at operatorene L_z og S_z begge kommuterer med både $\vec{L}^{\,2} = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ og $\vec{S}^{\,2} = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$.

Vis at L_z og S_z hver for seg ikke kommuterer med $\vec{J}^{\,2} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$, men at summen $J_z = L_z + S_z$ kommuterer med $\vec{J}^{\,2}$.

Hint: Vi har at

$$\vec{J}^{\,2} = \vec{J} \cdot \vec{J} = (\vec{L} + \vec{S}) \cdot (\vec{L} + \vec{S}) = \vec{L}^{\,2} + \vec{L} \cdot \vec{S} + \vec{S} \cdot \vec{L} + \vec{S}^{\,2} = \vec{L}^{\,2} + \vec{S}^{\,2} + 2\vec{L} \cdot \vec{S} \;.$$

Fordi L_z og S_z kommuterer med $\vec{L}^{\,2}$ og $\vec{S}^{\,2}$, behøver vi her bare beregne kommutatorene $[\vec{L} \cdot \vec{S}, L_z] = [L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z, L_z]$ og $[\vec{L} \cdot \vec{S}, S_z]$.

I Dirac-notasjon kan vi la en ≪kett≫ $|\psi\rangle$ representere tilstanden til et elektron i et hydrogenatom. Ettersom operatorene $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, L_z og S_z kommuterer innbyrdes, kan vi for eksempel anta at $|\psi\rangle$ er en egentilstand for alle de fire operatorene, slik at

$$\vec{L}^{\,2} |\psi\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 |\psi\rangle \;, \quad \vec{S}^{\,2} |\psi\rangle = s(s+1)\hbar^2 |\psi\rangle \;, \quad L_z |\psi\rangle = m_\ell \hbar |\psi\rangle \;, \quad S_z |\psi\rangle = m_s \hbar |\psi\rangle \;.$$

Et elektron er alltid i en egentilstand for $\vec{S}^{\,2}$ med $s = 1/2$. Mulige verdier for de andre kvantetallene er, som kjent, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell$ og $m_s = \pm 1/2$. Vi kan bruke kvantetallene ℓ, s, m_ℓ og m_s som merkelapper på tilstanden, og vi skriver da

$$|\psi\rangle = |\ell, s, m_\ell, m_s\rangle \;.$$

Vi kan utelate s som merkelapp, siden vi alltid har $s = 1/2$. I det følgende vil vi også utelate ℓ som merkelapp, og skrive mer kort og konsist

$$|\psi\rangle = |m_\ell, m_s\rangle \;.$$

Ettersom operatorene $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, $\vec{J}^{\,2}$ og J_z også kommuterer innbyrdes, kan vi anta at en annen tilstand $|\phi\rangle$ er en egentilstand for alle disse fire operatorene, slik at

$$\vec{L}^{\,2} |\phi\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 |\phi\rangle \;, \; \vec{S}^{\,2} |\phi\rangle = s(s+1)\hbar^2 |\phi\rangle \;, \; \vec{J}^{\,2} |\phi\rangle = j(j+1)\hbar^2 |\phi\rangle \;, \; J_z |\phi\rangle = m_j \hbar |\phi\rangle \;.$$

For en gitt verdi av ℓ kan $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ og $m_j = -j, -j+1, \ldots, j$. Hvis $\ell = 0$, er bare $j = \frac{1}{2}$ mulig. Hvis vi bruker enten alle de fire kvantetallene ℓ, s, j og m_j, eller bare de to siste, som merkelapper på tilstanden, kan vi skrive

$$|\phi\rangle = |\ell, s, j, m_j\rangle = |j, m_j\rangle \ .$$

c) I det følgende antar vi en bestemt verdi for kvantetallet ℓ (størrelsen av banedreieimpulsen). Vi vil se på sammenhengen mellom tilstandene $|m_\ell, m_s\rangle$ og $|j, m_j\rangle$.

De maksimale verdiene m_ℓ og m_s kan ha, er ℓ og $1/2$. Vis at tilstanden

$$|\psi_1\rangle = \left| m_\ell = \ell, m_s = \frac{1}{2} \right\rangle$$

er en egentilstand for $\vec{J}^{\,2}$ og J_z med $j = m_j = \ell + \frac{1}{2}$.

Hint: For å beregne $\vec{J}^{\,2}\,|\psi_1\rangle$ kan du bruke formelen $\vec{J}^{\,2} = J_- J_+ + J_z^2 + \hbar J_z$, der $J_\pm = J_x \pm \mathrm{i} J_y$. Vis at $J_+|\psi_1\rangle = 0$ (husk at $J_+ = L_+ + S_+$).
Repeter formlene for dreieimpuls $\vec{J}$, der $|j, m\rangle$ er felles egentilstand for $\vec{J}^{\,2}$ og J_z:

$$\begin{aligned}
\vec{J}^{\,2}\,|j, m\rangle &= j(j+1)\hbar^2\,|j, m\rangle \ , \\
J_z\,|j, m\rangle &= m\hbar\,|j, m\rangle \ , \\
J_+\,|j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\hbar\,|j, m+1\rangle \ , \\
J_-\,|j, m\rangle &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\hbar\,|j, m-1\rangle \ .
\end{aligned}$$

Tilsvarende formler gjelder for $\vec{L}$ og $\vec{S}$.

d) Vi har nå identifisert den ene av tilstandene $|j, m\rangle$ uttrykt ved tilstandene $|m_\ell, m_s\rangle$, nemlig

$$\left| j = \ell + \frac{1}{2}, m_j = \ell + \frac{1}{2} \right\rangle = \left| m_\ell = \ell, m_s = \frac{1}{2} \right\rangle .$$

Ved å operere på den med senkeoperatoren $J_- = L_- + S_-$ kan vi finne tilstanden

$$\left| j = \ell + \frac{1}{2}, m_j = \ell - \frac{1}{2} \right\rangle$$

også uttrykt ved tilstandene $|m_\ell, m_s\rangle$.

Gjør det!