Øving 20 for FY1004, våren 2008

Total dreieimpuls for et elektron (II)

Når elektronet har banedreieimpuls $\vec{L}$ og spinn $\vec{S}$, så har det total dreieimpulse $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Igjen bruker vi formlene for dreieimpuls $\vec{J}$, der $|j,m\rangle$ er felles egentilstand for $\vec{J}^{\,2}$ og J_z:

$$
\begin{aligned}
\vec{J}^{\,2}\,|j,m\rangle &= j(j+1)\hbar^2\,|j,m\rangle\ ,\\
J_z\,|j,m\rangle &= m\hbar\,|j,m\rangle\ ,\\
J_+\,|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\hbar\,|j,m+1\rangle\ ,\\
J_-\,|j,m\rangle &= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\hbar\,|j,m-1\rangle\ .
\end{aligned}
$$

Tilsvarende formler gjelder for $\vec{L}$ og $\vec{S}$.

Vi konkretiserer her og ser på P-tilstander, dvs. tilstander med kvantetall $\ell = 1$ for $\vec{L}^{\,2}$. Vi har alltid $s = \frac{1}{2}$ for et elektron.

Generelt kan vi klassifisere tilstander enten etter egenverdiene til operatorene $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, L_z og S_z, eller etter egenverdiene til operatorene $\vec{L}^{\,2}$, $\vec{S}^{\,2}$, $\vec{J}^{\,2}$ og J_z.

Det betyr at vi har to forskjellige sett med tilstander: tilstandene $|m_\ell, m_s\rangle$ har kvantiserte verdier for L_z og S_z, mens tilstandene $|j, m_j\rangle$ har kvantiserte verdier for $\vec{J}^{\,2}$ og J_z. Når $\ell = 1$, kan den totale dreieimpulsen være enten $j = \frac{3}{2}$ eller $j = \frac{1}{2}$.

a) Repetisjon fra øving 19. Vi så at vi kan identifisere tilstanden der j og m_j begge er maksimale, med tilstanden der m_ℓ og m_s begge er maksimale, altså:

$$\left| j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{3}{2} \right\rangle = \left| m_\ell = 1, m_s = \frac{1}{2} \right\rangle .$$

Operer på denne tilstanden med senkeoperatoren $J_- = L_- + S_-$ (bruk J_- på venstre side av likhetstegnet og $L_- + S_-$ på høyre side av likhetstegnet), og finn tilstanden

$$\left| j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{1}{2} \right\rangle$$

som en lineærkombinasjon av tilstandene $|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\rangle$ og $|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\rangle$.

b) De to tilstandene $|m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\rangle$ og $|m_\ell = 1, m_s = -\frac{1}{2}\rangle$ er ortogonale enhetsvektorer i Hilbert-rommet.

Finn en lineærkombinasjon av de to som er ortogonal til tilstanden $|j = \frac{3}{2}, m_j = \frac{1}{2}\rangle$.

Vis at denne tilstanden er egentilstanden $|j = \frac{1}{2}, m_j = \frac{1}{2}\rangle$ for operatorene $\vec{J}^{\,2}$ og J_z.

Hint: For finne hvordan $\vec{J}^{\,2}$ virker på denne tilstanden, kan du for eksemple bruke formelen $\vec{J}^{\,2} = J_- J_+ + J_z^2 + \hbar J_z$.

c) Bruk senkeoperatoren $J_- = L_- + S_-$ gjentatte ganger, og finn alle de seks tilstandene $|j, m_j\rangle$ med $j = \frac{3}{2}$, $m_j = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ og $j = \frac{1}{2}$, $m_j = \pm\frac{1}{2}$, som lineærkombinasjoner av de seks tilstandene $|m_\ell, m_s\rangle$ med $m_\ell = \pm 1, 0$ og $m_s = \pm\frac{1}{2}$.