# Øving 21 for FY1004, våren 2008 (se øving 10)

Hamiltonoperatoren for en partikkel i et endimensjonalt harmonisk oscillatorpotensial er

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}\,m\omega^2 x^2\ .$$

$m$ er massen til partikkelen, $x$ er posisjonen, og $\omega$ er vinkelfrekvensen. Energinivåene er

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$, og de tilsvarende energiegentilstandene er

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!\, \ell\, \sqrt[4]{\pi}}}\, H_n\!\left(\frac{x}{\ell}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\ell^2}}\ .$$

Den karakteristiske lengden for oscillatoren er

$$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\ .$$

$H_n$ er det $n$-te Hermite-polynomet, definert ved at $H_0(u) = 1$ og

$$H_{n+1}(u) = 2u\, H_n(u) - H_n'(u)\ .$$

Denne rekursjonsformelen for Hermite-polynomene gir at

$$H_1(u) = 2u\ , \qquad H_2(u) = 4u^2 - 2\ , \qquad H_3(u) = 8u^3 - 12u\ .$$

I denne oppgaven tar vi for oss to identiske partikler i det samme oscillatorpotensialet. Vi antar at partiklene ikke vekselvirker med hverandre. Topartikkelbølgefunksjonen er en funksjon av posisjonene $x_1$ og $x_2$ til begge de to partiklene, og Hamiltonoperatoren for topartikkelsystemet er

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{1}{2}\,m\omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right).$$

a) Vis at topartikkelbølgefunksjonen

$$\phi(x_1, x_2) = \psi_j(x_1)\,\psi_k(x_2)\ ,$$

som er et produkt av to enpartikkelbølgefunksjoner, er en energiegenfunksjon for topartikkelsystemet med energi $E_j + E_k$, når enpartikkelbølgefunksjonene $\psi_j$ og $\psi_k$ er energiegenfunksjoner for enpartikkelsystemet med energier $E_j$ og $E_k$.

Vis at denne topartikkelbølgefunksjonen er normert, slik at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2\ |\phi(x_1, x_2)|^2 = 1\ ,$$

når enpartikkelbølgefunksjonene $\psi_n$ er normerte,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ |\psi_n(x)|^2 = 1\ .$$

b) Hvis $j = k$ ovenfor, så er topartikkelbølgefunksjonen $\phi$ symmetrisk,

$$\phi(x_1, x_2) = \psi_j(x_1)\,\psi_j(x_2) = \psi_j(x_2)\,\psi_j(x_1) = \phi(x_2, x_1)\ .$$

Dette er derfor en mulig bølgefunksjon dersom de to partiklene er bosoner.

Hvis $j \neq k$, så er topartikkelbølgefunksjonen $\phi$ hverken symmetrisk eller antisymmetrisk, men vi kan symmetrisere den og få en mulig bølgefunksjon for to bosoner,

$$\phi_s(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_j(x_1)\,\psi_k(x_2) + \psi_j(x_2)\,\psi_k(x_1)\right)\ .$$

eller vi kan antisymmetrisere den og få en mulig bølgefunksjon for to fermioner,

$$\phi_a(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_j(x_1)\,\psi_k(x_2) - \psi_j(x_2)\,\psi_k(x_1)\right)\ .$$

Vis at både $\phi_s$ og $\phi_a$ er energiegenfunksjoner med energi $E_j + E_k$.

Vis også at de er normerte når $\psi_j$ og $\psi_k$ er ortonormale, dvs. når

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ (\psi_j(x))^*\,\psi_k(x) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad j = k\ , \\ 0 & \text{for} \quad j \neq k\ . \end{cases}$$

c) Hvilke energinivå finnes det med energi $E \leq 4\hbar\omega$ dersom de to partiklene er bosoner?

Hva er degenerasjonen (antallet tilstander) for hvert nivå?

Hvilke energinivå finnes det med energi $E \leq 4\hbar\omega$ dersom de to partiklene er fermioner?

Hva er degenerasjonen for hvert nivå?

d) En annen måte å løse det samme problemet på, er å innføre massesenterposisjonen $X = (x_1 + x_2)/2$ og relativposisjonen $x = x_1 - x_2$. I følge kjerneregelen er da

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}\ , \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x}\ . \end{aligned}$$

Vis at Hamiltonoperatoren uttrykt ved $X$ og $x$ er

$$H = -\frac{\hbar^2}{4m}\frac{\partial^2}{\partial X^2} + m\omega^2 X^2 - \frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\,m\omega^2 x^2\ .$$

Vi ser at massesenteret beveger seg som en harmonisk oscillator med vinkelfrekvens $\omega$ og masse $2m$, mens relativkoordinaten oppfører seg som en harmonisk oscillator med vinkelfrekvens $\omega$ og masse $m/2$ (den reduserte massen). Det impliserer at den karakteristiske lengden for massesenterbevegelsen er

$$\ell' = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\ ,$$

mens den karakteristiske lengden for relativbevegelsen er

$$\ell'' = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} = \ell\,\sqrt{2}\ .$$

e) Massesenterbevegelsen bidrar til den totale energien med

$$E' = \hbar\omega\left(n' + \frac{1}{2}\right),$$

der $n' = 0, 1, 2, \ldots$. Mens relativbevegelsen bidrar med

$$E'' = \hbar\omega\left(n'' + \frac{1}{2}\right),$$

der $n'' = 0, 1, 2, \ldots$.

Vis at $n'' = 0, 2, 4, \ldots$ for bosoner, og $n'' = 1, 3, 5, \ldots$ for fermioner.

f) I følge punkt e) kan energien til topartikkelsystemet skrives som

$$E = \hbar\omega\left(n' + n'' + 1\right),$$

der $n'$ kommer fra massesenterbevegelsen og $n''$ kommer fra relativbevegelsen.

Bruk dette resultatet til å telle opp om igjen energiegentilstandene for to bosoner og for to fermioner, opp til $E = 4\hbar\omega$, som under punkt c) ovenfor.