Ren rulling på krumt underlag – energibevarelse

Energibevarelse er slagkraftige saker. Med kjennskap til baneformen $y(x)$ og den 1. og 2. deriverte, hhv $y' = dy/dx$ og $y'' = d^2y/dx^2$, kan vi enkelt bestemme diverse størrelser for et objekt som ruller på den krumme banen. Objektet har et treghetsmoment

$$I_0 = cmr^2 \tag{1}$$

mhp rotasjonsaksen, som går gjennom massesenteret (CM). Her er m objektets masse, og r er objektets radius, dvs avstanden mellom CM og kontaktpunktet mellom objekt og bane. Vi antar i fortsettelsen at objektet er ei kompakt kule med uniform massefordeling, slik at $c = 2/5$. I praksis bruker vi kuler med masse $m \simeq 31$ g og radius $r = 11$ mm, men *mål* m og r for den kula som din gruppe benytter. La oss videre anta at banens krumningsradius R overalt er mye større enn kulas radius r, slik at vi med god tilnærmelse kan anta at CM følger samme kurveform som banen $y(x)$ (dvs bare forskjøvet litt vertikalt).

Kula starter med null hastighet i høyde $y(0) = y_0$. Da er total mekanisk energi

$$E = U_0 = mgy_0 \tag{2}$$

når vi velger $U = 0$ for $y = 0$. Total kinetisk energi K er summen av translasjonsenergien $mv^2/2$ og rotasjonsenergien $cmv^2/2$, i det vi antar at kula ruller rent, dvs uten å gli. Dvs,

$$K = \frac{1+c}{2} mv^2 \tag{3}$$

når farten er v. Energibevarelse gir da en hastighet

$$v(y) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y)}{1+c}} \tag{4}$$

når kula er et sted på banen der høyden er y og potensiell energi er mgy. Siden vi kjenner baneformen $y(x)$, kan vi like gjerne oppfatte farten som en funksjon av horisontal posisjon x, dvs $v(x) = \sqrt{2g[y_0 - y(x)]/(1+c)}$. Det samme vil selvsagt gjelde for alle størrelser i fortsettelsen. Banens krumning κ, dvs den inverse krumningsradien, er

$$\kappa = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}. \tag{5}$$

Da er sentripetalakselerasjonen umiddelbart gitt som

$$a_\perp = v^2/R = v^2\kappa = \frac{2g(y_0 - y)}{1+c} \cdot \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}. \tag{6}$$

Her vil κ være positiv der banen krummer oppover og negativ der den krummer nedover. Tilsvarende fortegn vil gjelde for $a_\perp$. Dette er konsistent med positiv y-retning oppover: Når banen krummer oppover, har vektoren $\boldsymbol{a}_\perp$ også retning oppover, dvs den har en positiv y-komponent. Med $c = 2/5$ blir hastigheten

$$v = \sqrt{\frac{10g(y_0 - y)}{7}}. \tag{7}$$

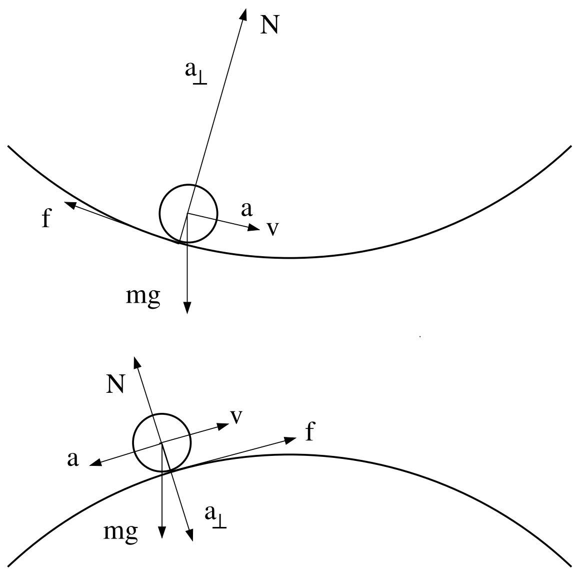
Vi ser i neste omgang på Newtons 2. lov normalt på banen. La oss velge fortegn slik at tyngdens komponent $mg\cos\beta$ peker i negativ retning mens normalkraften N virker i positiv retning. Her er β banens helningsvinkel. Da har vi

$$N - mg\cos\beta = ma_\perp, \tag{8}$$

enten banen krummer opp eller ned, slik at

$$N = m(g\cos\beta + a_\perp). \tag{9}$$

Hvis banen krummer opp, peker $a_\perp > 0$ i samme retning som N (dvs oppover), og N blir større enn $mg\cos\beta$. Hvis banen krummer ned, peker $a_\perp < 0$ i motsatt retning av N (dvs nedover), og N blir mindre enn $mg\cos\beta$.



Figur 1. Kule som ruller på et krumt underlag. Her er v kulas fart, a er baneakselerasjon, $a_\perp$ er sentripetalakselerasjon, mg er tyngdekraft, f er friksjonskraft og N er normalkraft. Merk: Kraftpilenes lengde stemmer typisk ikke innbyrdes. For eksempel er mg alltid større enn f.

Det gjenstår å finne (den statiske) friksjonskraften f fra banen på den rullende kula. La oss velge helningsvinkelens fortegn slik at $\beta < 0$ når kula ruller nedover og $\beta > 0$ når den ruller oppover. Da har stigningstallet

$$y' = dy/dx = \tan\beta \tag{10}$$

riktig fortegn.
Kreftene som virker tangentielt til banen er f og tyngdens tangentialkomponent $-mg\sin\beta$. Hvis banen heller nedover, er $\beta < 0$, $f < 0$ (dvs f har retning mot venstre) og $a = dv/dt > 0$ (kula får større fart). N2 blir da

$$-mg\sin\beta + f = ma. \tag{11}$$

Og hvis det er oppoverbakke: $\beta > 0$, $f > 0$ (dvs f har retning mot høyre) og $a = dv/dt < 0$ (kula får mindre fart). N2 blir da nøyaktig som (11). Med andre ord, samme ligning, enten det er nedover- eller oppoverbakke. Fra uttrykket $v(y) = \sqrt{2g(y_0 - y)/(1 + c)}$ ovenfor finner vi baneakselerasjonen:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = -\frac{g\sin\beta}{1+c}. \tag{12}$$

Her brukte vi $dy/dt = v_y = -v\sin\beta$. Med $c = 2/5$ blir $a = -5g\sin(\beta)/7$. Innsetting gir nå

$$f = ma + mg\sin\beta = \frac{c}{1+c}\,mg\sin\beta, \tag{13}$$

eller $f = 2mg\sin(\beta)/7$ for den kompakte kula.

Vi har her *forutsatt* at kula ruller rent, dvs uten å gli (slure) på underlaget. Den beregnede statiske friksjonskraften f kan imidlertid ikke overstige sin maksimale verdi, gitt ved $|f| = \mu_s|N|$. Her er μ_s den statiske friksjonskoeffisienten mellom kule og bane. Overflaten på de svarte datamus-kulene er en slags gummi. Banen er en type hard plast, trolig polyetylen eller polypropylen. Det er vel rimelig å anta at verdien av μ_s vil være minst 0.4 eller deromkring. For en gitt baneform kan en plotte størrelsen $|f/N|$ (evt skrive ut maksimumsverdien av $|f/N|$) og sjekke at antagelsen om ren rulling er oppfylt.

Tidsutviklingen

Når prinsippet om bevaring av mekanisk energi utledes fra Newtons 2. lov, forsvinner tidsaspektet på magisk vis. Dvs, tiden t inngår ikke lenger i ligninger og uttrykk. Dermed må vi som regel tilbake til Newtons 2. lov dersom vi ønsker å bestemme tidsutviklingen, dvs kulas posisjon (og eventuelt andre størrelser) som funksjon av t. Vi skal skissere hvordan dette kan gjøres numerisk, med en enkel og lettfattelig metode ("forward Euler"). I vårt konkrete problem, der kula er tvunget til å rulle på en bane med en bestemt form $y(x)$, er det en enda enklere måte å bestemme tidsutviklingen på: Energibevarelse gir oss hastigheten v uttrykt som en funksjon av høyden y, og dermed som en funksjon av kulas horisontale posisjon x, via baneformen $y(x)$. Da er tiden dt som kula bruker på en liten horisontal forflytning dx direkte gitt som $dt = dx/v_x$, for hastighetens komponent i x-retningen er jo *definert* som $v_x = dx/dt$.

Metode 1: Newtons 2. lov og forward Euler (med fast tidssteg dt)

Vi tok utgangspunkt i Newtons 2. lov og fant at kulas baneakselerasjon er $a = -(5g/7)\sin\beta$ når banens helningsvinkel er β. Banens form $y(x)$ og stigningstallet $dy/dx = \tan\beta$ er kjente størrelser. Med andre ord, vi kjenner $\beta = \arctan(dy/dx)$ og dermed a langs hele banen. Ideen i Eulermetoden er da slik: Anta at kula starter i posisjon (x_0, y_0) med starthastighet $v_0 = 0$ ved tidspunktet $t_0 = 0$. Siden $a = dv/dt$, vil kula i løpet av et lite tidssteg dt endre sin hastighet med $dv = a\,dt$. Og siden $v = ds/dt$, vil kula i løpet av tiden dt endre sin posisjon (langs banen) med $ds = v\,dt$. Med de aktuelle startbetingelsene gir dette mellom $t_0 = 0$ og $t_1 = dt$ en forflytning $v_0\,dt = 0$ og en hastighetsendring $-(5g/7)\sin\beta_0\,dt$, slik at $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$ og $v_1 = -(5g/7)\sin\beta_0\,dt$. Siden kula ikke flyttet seg i det første tidssteget, har vi selvsagt fremdeles samme helningsvinkel, dvs $\beta_1 = \beta_0$. I tidssteg nr 2 blir forflytningen langs banen $ds_2 = v_1\,dt$, forflytningen horisontalt $dx_2 = ds_2\cos\beta_1$, og ny horisontal posisjon blir $x_2 = x_1 + dx_2 = x_1 - (5g/7)\sin\beta_1\cos\beta_1(dt)^2$. Ny vertikal posisjon kan fastlegges fra baneformen: $y_2 = y(x_2)$. Litt mer generelt: Når posisjonen (x_n, y_n) og hastighetens horisontale komponent $v_{x,n}$ ved tidspunktet $t_n = n\,dt$ er kjent, har vi

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + v_{x,n}dt \\
y_{n+1} &= y(x_{n+1}) \\
v_{n+1} &= v_n + a_n dt \\
t_{n+1} &= (n+1)dt
\end{aligned}
$$

ved neste tidspunkt t_{n+1}. Dette gjentar vi inntil vi har kommet fram til ønsket maksimale horisontale posisjon.

Metode 2: Energibevarelse og $dt = dx/v_x$ (med fast horisontalt steg dx)

Notebooken `baneform_V23.ipynb` beregner $y(x)$ for 1401 jevnt fordelte x-verdier, dvs for hver hele mm, fra og med $x_0 = 0$ til og med $x_{1400} = 1400$ mm. Hastigheten v_n og helningsvinkelen β_n i posisjon (x_n, y_n) er kjente størrelser. Da kan vi regne ut hvor lang tid Δt_n kula har brukt på intervallet mellom x_{n-1} og x_n ($n = 1, 2, \ldots, 1400$). Horisontal komponent av hastigheten i posisjon x_n er $v_{x,n} = v_n \cos\beta_n$. Gjennomsnittlig horisontalkomponent av hastigheten på intervall nr n er da (med god tilnærmelse)

$$\langle v_x \rangle_n = \frac{1}{2}\left(v_{x,n-1} + v_{x,n}\right). \tag{14}$$

Fra den grunnleggende definisjonen $\langle v_x \rangle_n = \Delta x_n / \Delta t_n$ har vi dermed

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{\langle v_x \rangle_n} = \frac{2\Delta x_n}{v_{x,n-1} + v_{x,n}}, \tag{15}$$

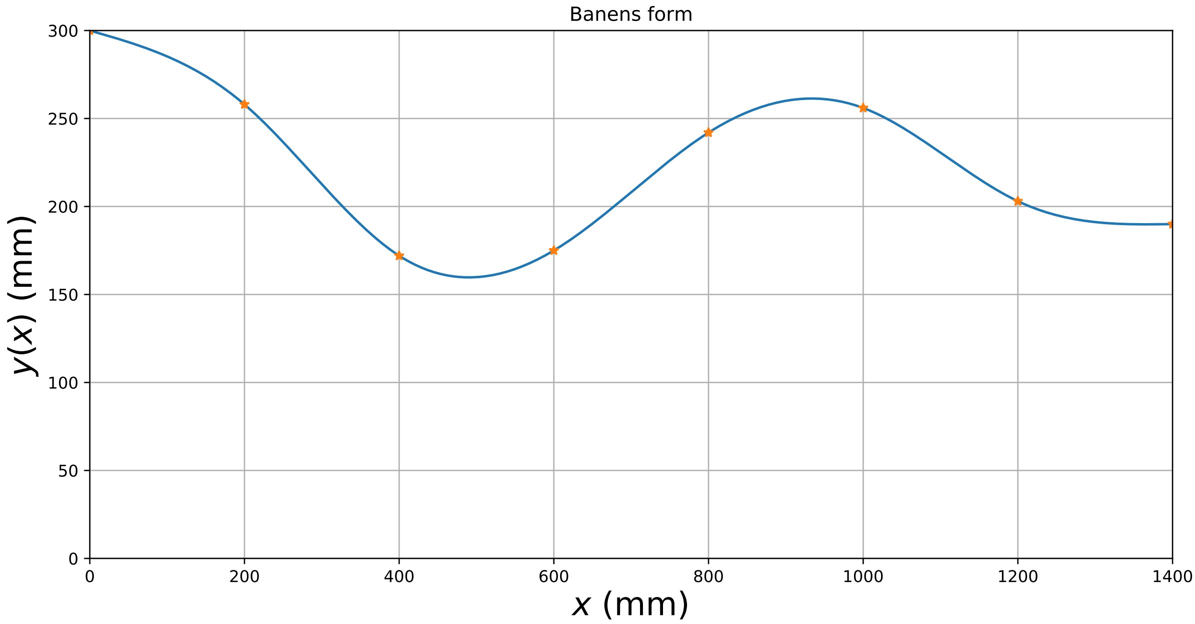
med konstant horisontalt steg $\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = 1$ mm. Kula (dvs kulas massesenter) starter i posisjon (x_0, y_0) med starthastighet $v_0 = 0$ ved tidspunktet $t_0 = 0$ og passerer posisjonene (x_n, y_n) med hastigheter v_n ved tidspunktene

$$t_n = \sum_{j=1}^{n} \Delta t_j \quad ; \quad n = 1, \ldots, 1400. \tag{16}$$

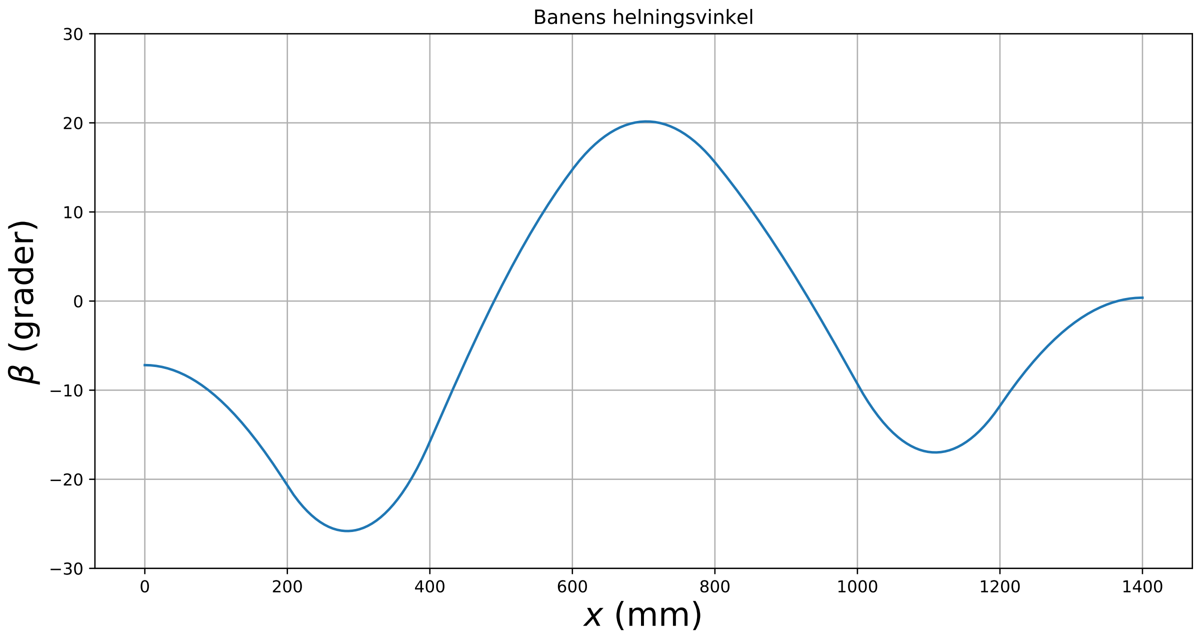
Velg selv om dere vil bruke den ene eller den andre metoden for å bestemme tidsutviklingen, og dermed hvor lang tid kula bruker på å rulle fra start til mål.

Eksempel

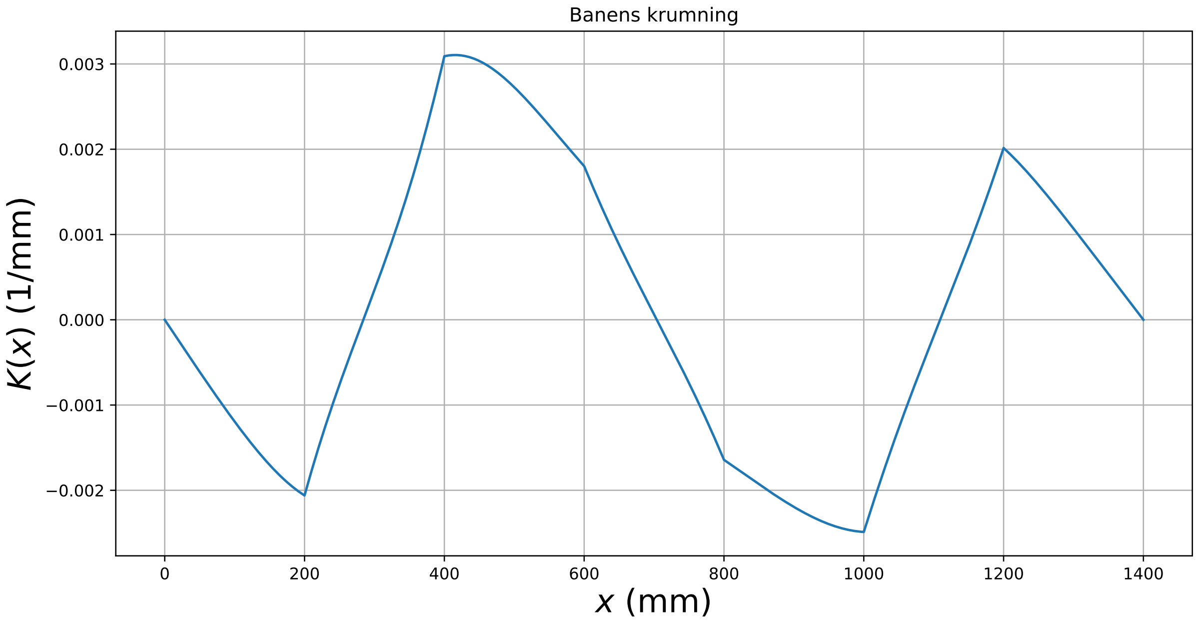
En bane $y(x)$ kan se slik ut:



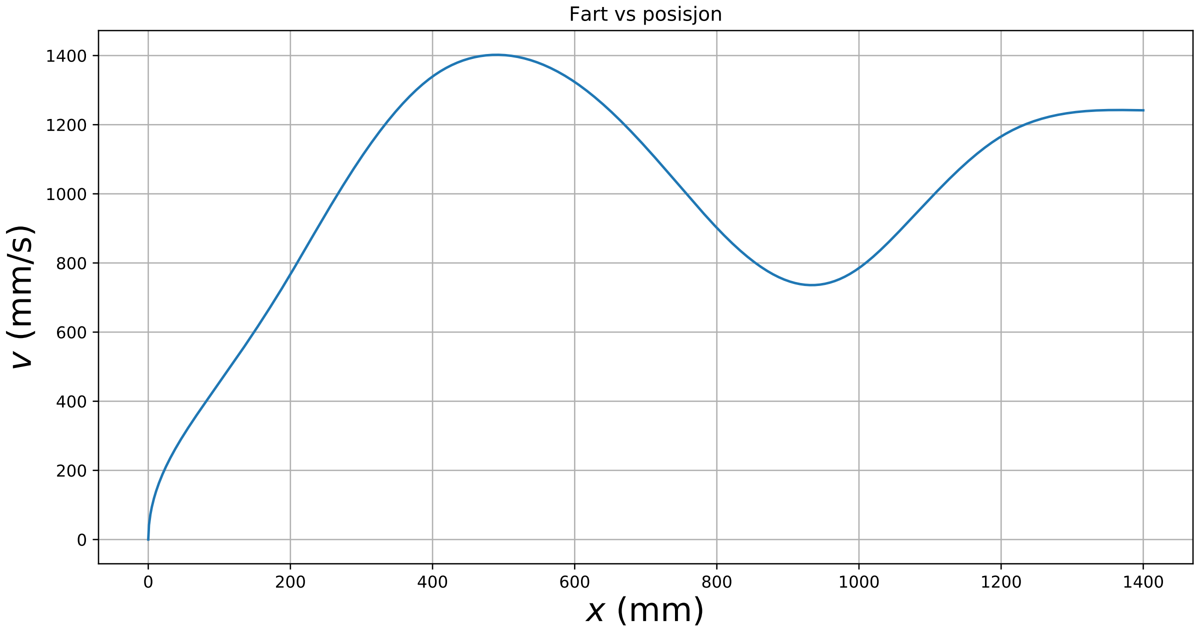
Her er starthøyden $y_0 = 300$ mm. Laveste festepunkt, ved $x = 600$ mm, er i høyden $y = 176$ mm. Banens helningsvinkel β overstiger ikke $22.0°$ i absoluttverdi:



Banens krumning overstiger ikke verdien 3 pr m (i absoluttverdi), slik at minste krumningsradius er ca 330 mm, og dermed my større enn kulas radius langs hele banen:

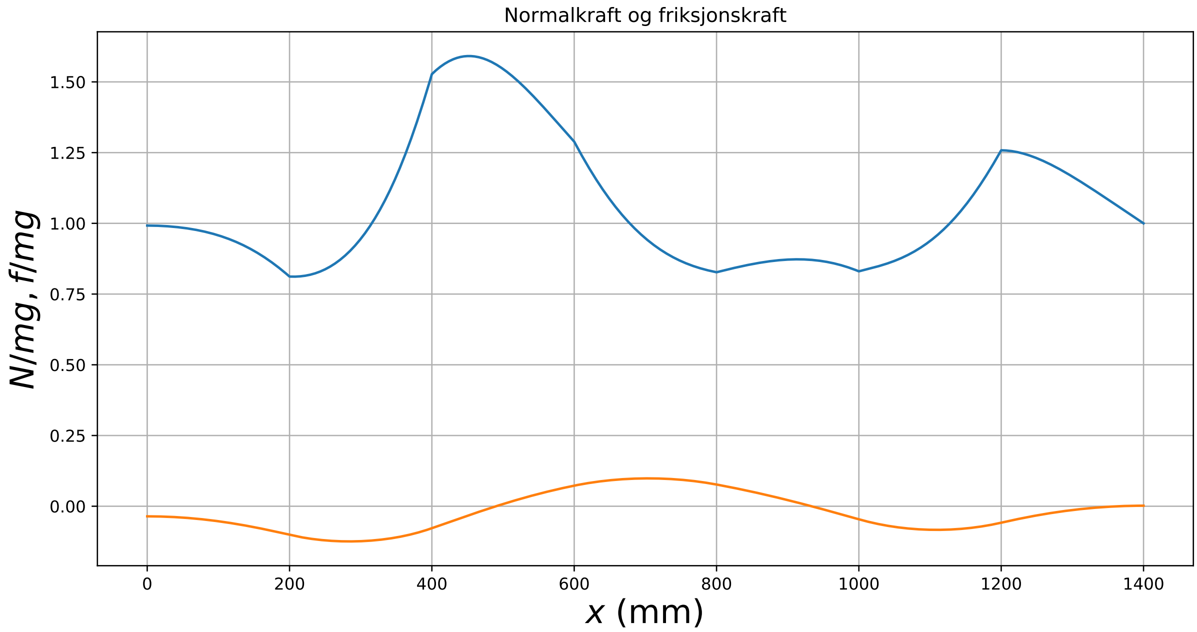


Fartsgrafen $v(x)$ ser slik ut:

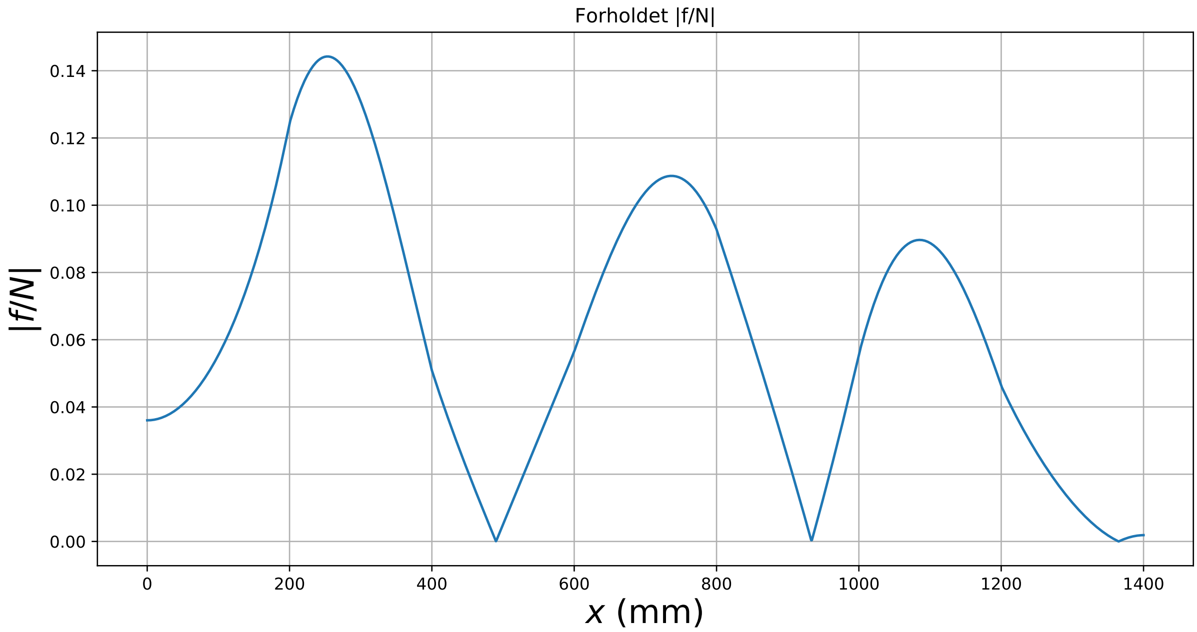


Maksimal hastighet oppnås som ventet i banens bunnpunkt, ved $x \simeq 500$ mm.

Grafene for normalkraften $N(x)$ og friksjonskraften $f(x)$ (her i enheter av kulas tyngde mg):



Forholdet mellom friksjonskraften f og normalkraften N overstiger ikke verdien 0.12:



Dvs, dersom statisk friksjonskoeffisient er større enn 0.12, forventer vi at kula ruller rent uten å gli på denne banen.

Hele reisen tok ca 1.71 sekunder.

02.02.2023 J. A. Støvneng