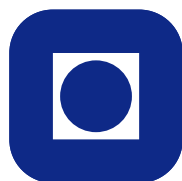


Lab i TFY4108

Oppgave 3: Rotasjon

Institutt for fysikk, NTNU

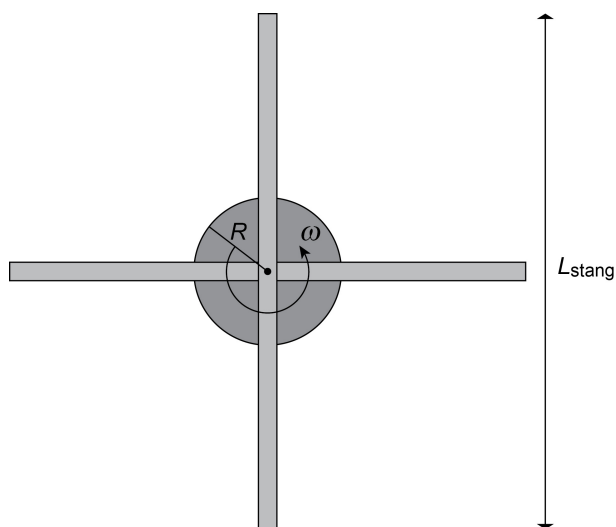


1.1 Innledning

Newtons lover beskriver sammenhengen mellom krefter som utøves på et objekt, og dets resulterende translasjonsbevegelse. I mange tilfeller er det nyttig, og tilstrekkelig, å anta at all massen til objektet er samlet i ett punkt, massesenteret. Men virkelige objekter med utstrekning kan utføre *rotasjon* i tillegg til translasjon. Et hjul som snurrer, en dør som åpnes, vannets virvelstrøm ned sluket; dette er alle eksempler på rotasjonsbevegelser som vi kjenner godt fra dagliglivet. I denne labøvelsen skal vi fokusere på rotasjon av et stivt legeme rundt en fiksert akse, og bevaring av dreieimpuls (evt spinn) og energi. Merk imidlertid at rotasjon er et generelt fenomen som inkluderer eksempler som jordas elliptiske bane rundt sola, og en tornados sirkelbevegelse der vindhastigheten er høyere nær ”øyet” enn lengre ut.

1.2 Forhåndsoppgaver

Figur 1.2.1 viser en forenklet skisse av karusellen sett ovenfra med rotasjonsaksen sentralt, i rotasjon mot klokka med vinkelhastighet ω . Beregn treghetsmomentet I_0 til karusellen (uten lodd) ved å benytte formler for treghetsmoment for utvalgte legemer gitt i læreboka, evt. andre standard oppslagsverk (Wikipedia e.l.). Anta at hver stang har masse $m_{\text{stang}} = (0.90 \pm 0.01)$ kg og lengde $L_{\text{stang}} = (64.0 \pm 0.1)$ cm, og anta videre at karusellen har en sentral, massiv sylinderformet skive med masse $m_{\text{sylinder}} = (2.50 \pm 0.10)$ kg og radius $R = (59 \pm 1)$ mm som angitt i Figur 1.2.1.



Figur 1.2.1: Skisse av karusell uten lodd.

1.3 Obs før du starter med laboratorieoppgavene

Det legges vekt på forståelse av grunnleggende prinsipper. Forsøk å jobbe rolig og metodisk. Vi forventer at du sitter ut hele labtida (4 timer). Det er ikke et krav om at alle oppgaver skal utføres.

- Ikke sett større fart på karusellen enn hva fjæra kan gi, dvs. ikke bruk håndkraft i tillegg.
- Tvinn opp snora slik at karusellen roterer mot klokka, og start opptvinningen med ytterenden.
- Vær forsiktig med den oppstrammede fjæra slik at den ikke slippes i vanvare.
- Skru loddene godt til, og fest på stoppeskruen og magnetene på enden av stengene.

1.4 Laboratorieoppgaver

DEL I

I første del av oppgaven skal vi gjøre oss kjent med karusellen og finne ut hvordan målingene fungerer.

1.4.1 Karusellen

- Prøv ut karusellen. Finn ut hva som kan endres på og sett karusellen i sving med ulike parametre. Hva er avgjørende for hvor fort apparaturen roterer? Ikke gjør noen målinger, bare observer og diskuter.
- Finn et uttrykk for omdreiningstida T for karusellen som funksjon av antal varv per minutt (RPM), det er 8 reflekser på karusellen som gir en signal var. Sjekk formelen din ved å måle tida for f.eks. 10 omdreininger med klokke, og se om denne målte omdreiningstida T stemmer med hva du beregner fra takometerns viste hastighet.
- Fra formelen du har funnet for omdreiningstida $T(V)$, sett opp sammenhengen mellom vinkelhastigheten ω og viste hastighet RPM . (ω = radianer per sekund.)

DEL II

I denne delen av oppgaven skal vi se på bevaring av energi og dreieimpuls til et roterende system, samt systemets treghetsmoment.

1.4.2 Bevaring av energi

Vi tilfører energi til systemet ved å strekke fjæra. Denne energien er gitt ved Hookes lov. Anta i det videre at det ikke tapes noe energi, dvs. all potensiell energi i fjæra overføres til rotasjonsenergi. På grunnlag av uttrykket for kinetisk energi, $E = \frac{1}{2}mv^2$, kan man som vist i Tillegg B finne et uttrykk for rotasjonsenergien, $E = \frac{1}{2}I_0\omega^2$. Treghetsmomentet I_0 for det roterende systemet (dvs karusell uten lodd) har du funnet i forhåndsoppgaven. Dersom energien er bevart i systemet, vil rotasjonsenergien være lik fjærenergien: $\frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}kx^2$. Nå skal vi etterprøve dette eksperimentelt.

- Bruk Hookes lov til å finne fjærkonstanten k for fjæra i 5 cm steg i det brukbare intervallet. Bruk fjærvekta og mål utstrekkingen x .
- Beregn så hvor mye energi fjæra har når den er strukket x cm.
- Fest på fire lodd (hver med masse $m = 0.50$ kg) på apparaturen i avstand $r = 20$ cm fra sentrum. (Loddene må alltid festes symmetrisk på stengene.) Gjør 5 målinger og endre sedan utstrekkingen av fjæra og repeter for minst tre ulike utstrekkinger. Beregn vinkelhastigheten ω , fjæreenergien og rotasjonsenergien, og sammenlign verdiene i en tabell. Er energien bevart i dette systemet for alle utstrekkinger? Hvor store avvik får du? Du kan benytte verdien for treghetsmomentet fra forhåndsoppgaven, men husk at i tillegg til karusellen uten lodd vil også de 4 loddene gi bidrag til treghetsmomentet. Dermed blir uttrykket for treghetsmomentet $I = I_0 + \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$, der I_0 er treghetsmomentet til karusellen uten lodd. Man summerer over n lodd, der m_i er massen til lodd i og r_i er avstanden fra rotasjonsaksen til lodd i . Gjør deg noen tanker om hvor det kan være tap av mekanisk energi i systemet.

1.4.3 Bevaring av dreieimpuls

I denne oppgaven skal dere undersøke bevaring av apparaturens dreieimpuls. Den skal være bevart dersom apparaturen ikke påvirkes av et ytre dreiemoment. Med dette oppsettet kan vi endre apparaturens treghetsmoment uten å bruke noe ytre dreiemoment, ganske enkelt ved å endre loddenes posisjon mens karusellen roterer. Dersom loddene slippes utover på karusellens stenger, vil treghetsmomentet bli større. Skal dreieimpulsen være bevart, må vinkelhastigheten da bli mindre, og vi skal se at dette stemmer.

- Bruk alle åtte lodd på oppsettet. Fest ett lodd ytterst på hver rotasjonsarm. De kommer til å utsettes for en stor kraft, så sett dem godt fast. Bruk snora til å feste de andre fire loddene til hurtigutløsningspinnen. Sett god fart på oppsettet og registrer hastigheten før og etter du fjerner utløsningspinnen (5 målinger for hver avstand r er tilstrekkelig). Gjør det samme for to ulike lengder på snora (r). Beregn nå treghetsmomentet og dreieimpulsen før og etter forandringen i loddenes posisjon, og sammenlign.
- Bestem unøyaktigheten i målingene. Er dreieimpulsen den samme før og etter forandringen i loddenes posisjon? (Benytt usikkerhetsanalyse på samme måte som du har gjort på tidligere laboppgaver.)
- Sammenlign rotasjonsenergien før og etter forandringen i loddenes posisjon for et av eksperimentene. Er energien bevart nå? Hvis ikke, kan du forklare hvor den har blitt av?
- Sett deg på en roterbar kontorstol med en tung fysikk- eller mattebok i hver hånd. La en kamerat sette deg i rotasjon og trekk hendene inntil kroppen. Hva skjer? Tenk gjennom og prøv å forklare hva som skjer i lys av dreieimpulsbevaring. Enkelte idrettsutøvere utnytter slike effekter. Nevn eksempler.

1.4.4 Tregghetsmomentet

Tregghetsmomentet er avhengig av massen m og massens avstand r fra rotasjonsaksen. I det videre skal dere ha ulike m og ulike r , og måle hvordan omløpstida endres.

- Sett to lodd på apparaturen i avstand $r = 20$ cm fra rotasjonsaksen og symmetrisk om aksene. Mål igjen rotasjonen og beregn vinkelhastigheten ω . Strekk fjæra til samme lengde. Gjenta dette med 4, 6 og 8 lodd med samme avstand r hver gang og symmetrisk om aksene. (3 målinger pr avstand r er tilstrekkelig.) Før resultatene inn i en tabell med verdier for ω og I som funksjon av total masse M . Plott på millimeterpapir tregghetsmomentet I som funksjon av massen m og vinkelhastigheten ω . Er plottene i samsvar med teorien?
- Varier nå avstanden r fra sentrum med to lodd på karusellen. Mål rotasjonen for ulike avstander r . Gjør 3 målinger for hver avstand r . Strekk alltid fjæra til samme lengde som i punktet over. Beregn vinkelhastigheten ω . Før resultatene inn i en tabell med verdier for ω som funksjon av r . Før også inn i tabellen tregghetsmomentet I som funksjon av r . Plott på millimeterpapir tregghetsmomentet I som funksjon av r . Hva observerer dere?

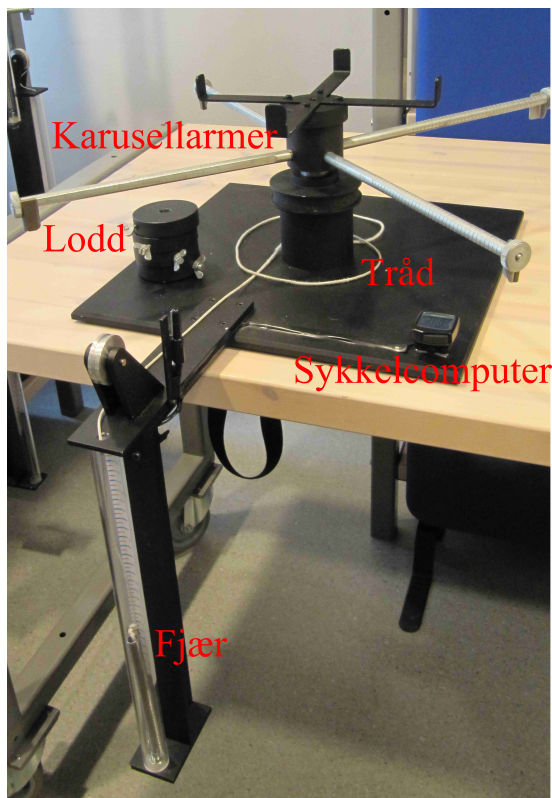
Referanser

- [1] P. A. Tipler and G. Mosca: *Physics*, 6. utgave, Freeman, New York 2008.
- [2] H. D Young and R. A Freedman: *University Physics*, 13. utgave, Addison-Wesley, San Francisco 2011.
- [3] K. A. Strand: En liten innføring i usikkerhetsanalyse, NTNU, Trondheim 2006.
- Bjørnar Sandnes og Astrid Marie Flattum Muggerud, 2012.
Erik Wahlstrøm, 2013.
(Oppsett og oppgaver er basert på et Teknostartprosjekt utarbeidet av Lars Erik Walle og annet personell ved Institutt for fysikk)

Tillegg A

Apparatur

Oppsettet som skal brukes i laboppgaven er vist i figur A.0.1.



Figur A.0.1: Karusellen som skal brukes på laben.

Den roterende karusellen består av fire armer som det kan festes lodd på i varierende avstand fra karusellens akse. For å sette karusellen i rotasjon, benyttes en tråd som tvinnes opp om karusellens akse. Tråden er forbundet til ei fjær som trekkes opp. Hvor mye fjæra trekkes opp vil avgjøre hvor fort karusellen roterer.

På karusellen sitter 8 reflekser, de gir en signal per refleks til den optiske takometern, som måler pulser per minutt (RPM).

Oppgitte verdier

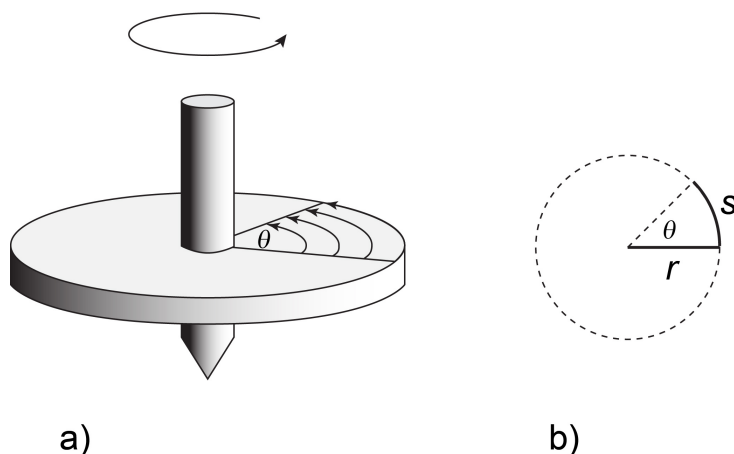
- Masse til hvert lodd: $m = 0.50$ kg.

Tillegg B

Teoretisk grunnlag

B.1 Rotasjonsbevegelse

Vi bruker snurrebassen i Figur B.1.1 a) som eksempel, og antar for enkelhets skyld at den spinner rundt en fiksert akse. Et vilkårlig punkt på skiva beveger seg vinkelrett på radien med en hastighet v som øker jo lenger fra rotasjonsaksen det befinner seg. Det er derfor hensiktsmessig å beskrive sirkelbevegelsen med vinkelen θ og vinkelhastigheten ω , siden ω er like stor for alle deler av snurrebassen. Vi bruker radianer som enhet for vinkelutslag, definert ved $\theta = s/r$, der s er sirkelbuens lengde og r dens radius (se Figur B.1.1 b)).



Figur B.1.1: a) En snurrebass i rotasjon mot klokka. b) Vinkelen er gitt ved forholdet mellom sirkelbuens lengde og dens radius, $\theta = s/r$.

På samme måte som lineær hastighet er den tidsderiverte av posisjonen, har vi at $\omega = d\theta/dt$, og videre at vinkelakselerasjonen er $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$. Vi har altså følgende relasjoner for rotasjonsbevegelsen til stive legemer:

$$s = r\theta \quad , \quad v = r\omega \quad , \quad a = r\alpha. \quad (\text{B.1.1})$$

B.2 Rotasjonsenergi og treghetsmoment

Vi tenker oss at vi deler snurrebassen opp i mange elementer, hvert med masse m_i . Fra før vet vi at hvert element da har kinetisk energi $E_{k,i} = \frac{1}{2}m_iv_i^2$. Uttrykt ved vinkelhastigheten (Ligning B.1.1) blir dette $E_{k,i} = \frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$. Den totale kinetiske energien til snurrebassen får vi ved å addere alle elementenes bidrag:

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\omega^2. \quad (\text{B.2.2})$$

Uttrykket (B.2.2) for kinetisk rotasjonsenergi er analogt med uttrykket for kinetisk translasjonsenergi der ω erstatter v , og $(\sum_i m_ir_i^2)$ erstatter massen m . Massen til et objekt representerer tregheten mot å bli satt i translasjonsbevegelse. Tregheten mot å bli satt i *rotasjon* avhenger altså ikke bare av massen men også av dens avstand fra rotasjonsaksen. Denne tregheten mot rotasjonsbevegelse

$$I = \sum_i m_ir_i^2,$$

kalles treghetsmoment. Vi har da kinetisk energi for rotasjon av et stivt legeme rundt en fiksert akse:

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (\text{B.2.3})$$

Treghetsmomentet avhenger av geometrien til et objekt, såvel som massen. I lærebøkene [1-2] oppgis treghetsmoment for en rekke typiske stive legemer.

B.3 Dreiemoment

Newtons 2. lov sier at akselerasjonen til et legeme med en viss masse (treghet) er proporsjonal med kraften som utøves på det: $F = ma$. Den analoge størrelsen til kraft kalles *dreiemoment* for rotasjonsbevegelser, og er gitt ved

$$\tau = rF_{\perp}, \quad (\text{B.3.4})$$

der $F_{\perp}$ er kraftkomponenten som virker normalt på radien r . Ekvivalent til Newtons 2. lov har vi videre at vinkelakselerasjonen α for et stivt legeme med treghetsmoment I er proporsjonal med dreiemomentet:

$$\tau = I\alpha. \quad (\text{B.3.5})$$

Tabell 1 viser en oversikt over en rekke analoge størrelser i en sammenligning mellom translasjon (lineær bevegelse) og rotasjon.

B.4 Bevaring av dreieimpuls

Noen fundamentale fysiske størrelser er bevart i lukkede systemer; de kan verken produseres eller ødelegges, bare endre form. Bevaring av *energi* er et velkjent prinsipp: En pendel har potensiell energi i jordas tyngdefelt, og denne kan omdannes til kinetisk energi (og vice versa) under pendelbevegelsen. Videre har vi for translasjonsbevegelse at *impulsen* ($p = mv$) er bevart så lenge et

Tabell B.1: Analoge størrelser for translasjons- og rotasjonsbevegelse.

Translasjon		Rotasjon	
navn	symbol	navn	symbol
distanse	x	vinkel	θ
masse	m	treghetsmoment	I
hastighet	$v = dx/dt$	vinkelhastighet	$\omega = d\theta/dt$
akselerasjon	$a = dv/dt$	vinkelakselerasjon	$\alpha = d\omega/dt$
kraft	F	dreiemoment	$\tau = rF_{\perp}$
Newtons 2. lov	$F = ma$	Newtons 2. lov for rotasjon	$\tau = I\alpha$
impuls	$p = mv$	dreieimpuls	$L = I\omega$

system ikke utsettes for ytre krefter. Det kommer kanskje ikke som en overraskelse at det finnes et analogt prinsipp for rotasjonsbevegelse: bevaring av *dreieimpuls*. Altså: I et lukket system der det ikke virker ytre dreiemoment er den totale dreieimpulsen L bevart innad i systemet:

$$L_1 = L_2. \quad (\text{B.4.6})$$

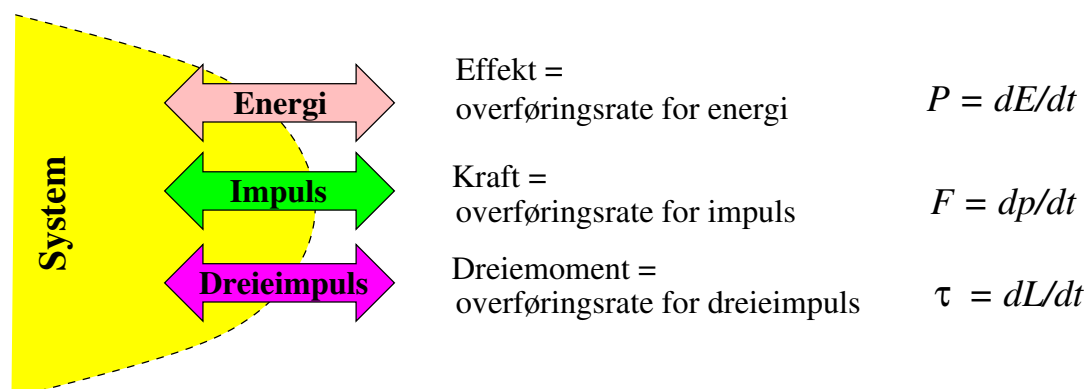
Her er L_1 og L_2 spinnnet henholdsvis før og etter en ”hendelse”. Prinsippet om dreieimpulsbevaring har blitt verifisert eksperimentelt utallige ganger, og er ansett som et universelt prinsipp på lik linje med bevaring av energi, masse og impuls. Bevaring av dreieimpuls gjelder på alle skalaer, fra atomer til galakser.

For et stivt legeme som roterer rundt en fiksert akse, har vi at dreieimpulsen er gitt som produktet av treghetsmomentet og vinkelhastigheten:

$$L = I\omega. \quad (\text{B.4.7})$$

(Sammenlign dette med uttrykket for (lineær) impuls: $p = mv$.)

Figur B.4.2 illustrerer vekselvirkningene til et system med omgivelsene gjennom overføring av energi, impuls og dreieimpuls. Ratene for overføring er representert ved henholdsvis effekt, kraft og dreiemoment.



Figur B.4.2: Et system vekselvirker med omgivelsene gjennom overføring av energi, impuls og dreieimpuls.