TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

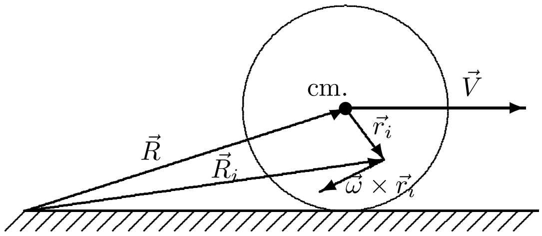
Notat om banespinn og egenspinn.

I flere øvingsoppgaver og bowlingkule-eksemplet i forelesning og repetisjon brukes følgende formel for totalspinn for et rullende legeme (rein rulling eller sluring):

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + I_0\vec{\omega}$$

med
$\vec{R}$ = vektor fra aksen spinnet $\vec{L}$ beregnes om til massefellespunktet (cm.),
$\vec{V}$ = cm-hastighet,
I_0 = treghetsmoment om cm,
$\vec{\omega}$ = vinkelhastighet om cm.

Første ledd kan kalles banespinn (spinn pga. translasjon av cm) og andre ledd egenspinn (rotasjon om cm). Vi skal vise formelen og spesielt at egenspinnet ikke er avhengig av hvilken akse spinnet beregnes om.



Posisjonsvektor for et masseelement m_i i det rullende legemet benevnes $\vec{R}_i = \vec{R} + \vec{r}_i$, der $\vec{r}_i$ er radiusvektor fra masseelementets cm. Masseelementet har hastighet $\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, der siste ledd er hastighet pga. rotasjonen. Dette gir

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum\nolimits_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i \\
&= \sum\nolimits_i \left(\vec{R} + \vec{r}_i\right) \times m_i \left(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) \\
&= \vec{R} \times \sum\nolimits_i m_i \vec{V} + \sum\nolimits_i \vec{R} \times m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) + \sum\nolimits_i \vec{r}_i \times m_i \vec{V} + \sum\nolimits_i \vec{r}_i \times m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) \\
&= \vec{R} \times M\vec{V} + \vec{R} \times \vec{\omega} \times \left(\sum\nolimits_i m_i \vec{r}_i\right) + \left(\sum\nolimits_i m_i \vec{r}_i\right) \times \vec{V} + \left(\sum\nolimits_i m_i\, \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\right)
\end{aligned}$$

De to summene $(\sum_i m_i \vec{r}_i) = 0$ fordi r_i nettopp er avstandsvektor fra cm, slik at når summer og vekter over alle masser blir summen null.

Dobbeltkryssproduktet i siste ledd kan vi f.eks. bruke Rottmanns $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$:

$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i \cdot 0 = \vec{\omega} r_i^2$$

fordi $\vec{\omega} \perp \vec{r}_i$. Dermed får vi det vi skulle vise:

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \left(\sum\nolimits_i m_i r_i^2\right) \vec{\omega} = \vec{R} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}\,.$$

[Bevist også i Hauge og Støvneng kap 5.3, men litt mer komplisert utledning.]

A.M. 24.11.11