Kap. 4+5
Rotasjon av stive legemer

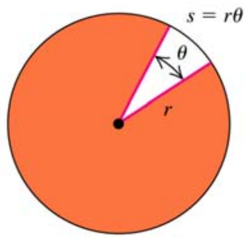
Vi skal se på:

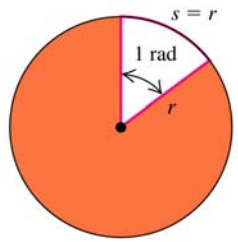
- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rask rekap)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rask rekap)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Rulling
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):

  $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

Vinkler måles i radianer:

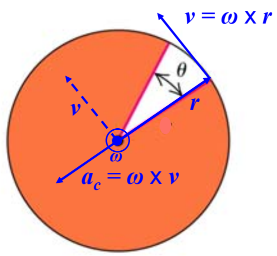
$\theta = s/r$ dvs. $s = r\theta$





Vinkelhastighet:

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$



Vinkelhastighet:

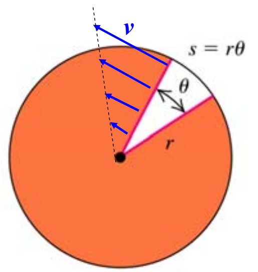
$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$

er lik for hele legemet

Banefart

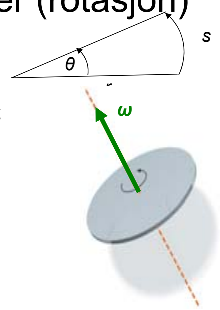
$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = r\,\omega$ (9.13)

øker med radien



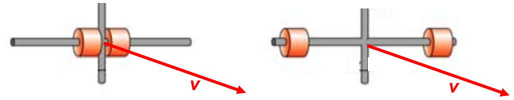
Viktige størrelser (rotasjon)

- Vinkelpos. $\theta = s/r$
- Vinkelfart $\omega = d\theta/dt = v/r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{\omega}$ langs akseretning
- Periode T = tid/omdr = $1/f$
- Frekvens $f = 1/T$
- Vinkelfrekvens = vinkelfart = $\omega = 2\pi f$
- Vinkelaksel. $\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/d^2t$
- Banefart $v = |v| = ds/dt = \omega r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
- Baneaksel. $a_t = \alpha r$
- Sentr.aksel. $a_c = v^2/r = \omega^2 r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$
- Total aksel = $\vec{a} = -a_c\hat{r} + a_t\hat{\theta}$



- Translasjon: $E_k = ½\, m\, v^2$

Massens plassering ingen betydning for E_k

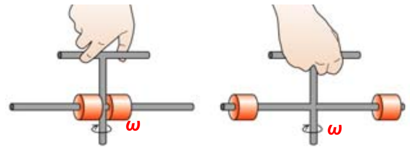


Samme $\boldsymbol{v}$, samme E_k

- Rotasjon: $E_k = ½\, I\, \omega^2$

  der $I = \int r^2\, dm$

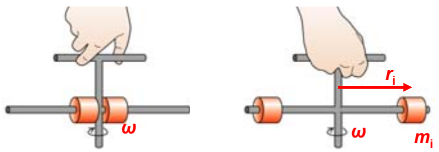
E_k øker med (massens avstand)^2 fra aksen



Samme $\boldsymbol{\omega}$, men ulik E_k

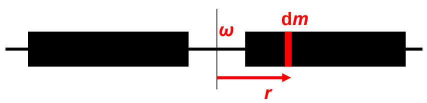
$E_k = ½\, I\, \omega^2$

$I = \Sigma\, r_i^2 m_i$



Her må vi integrere:

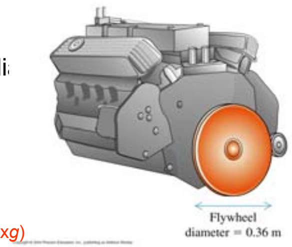
$I = \int r^2\, dm$



Rotasjonshjul som energilager

- Stålskive 10 cm tykk, 1,0 m di

Problem:
Tung! (600 kg)
Deformeres:
I periferien er
Banefart $v=\omega r$=1000 m/s
Sentripetalaksel $\omega^2 r$ = 220000xg)

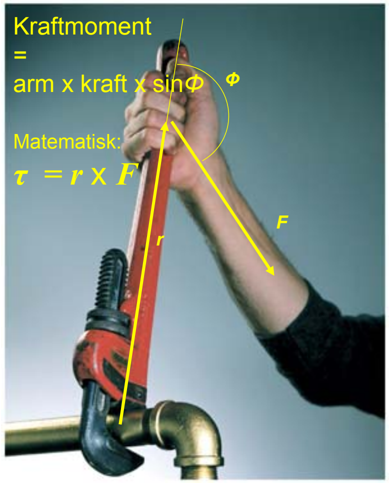


- Energi ved 20000 RPM (omdr. per min):
  $E_k = ½\, I\, \omega^2$ = 170 MJ
- Forbrenningsenergi i bensintank på 40 liter, ved utnyttelse 33%: ca 530 MJ

Kap. 4+5 Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- (N2-rot) stive legemer: $\boldsymbol{\tau} = I\, d\omega/dt$
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- (N2-rot) alle legemer: $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\omega$, $\quad \boldsymbol{\tau} = I\, d\omega/dt$
- Rulling
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

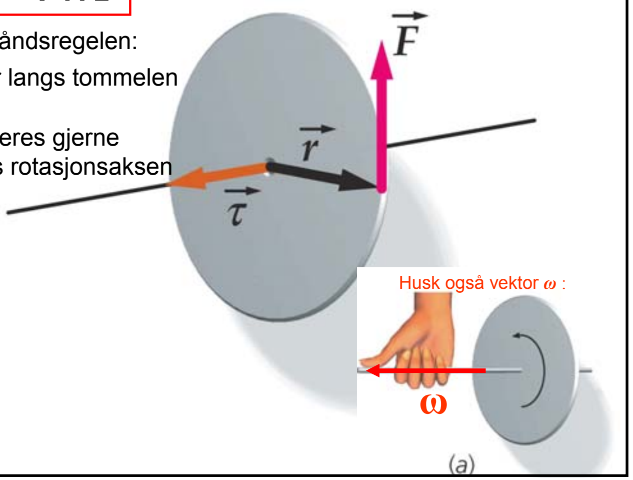


$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}}$

Høyrehåndsregelen:

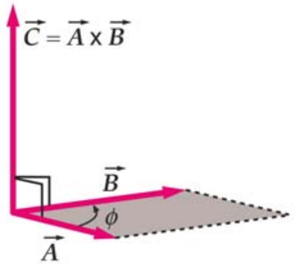
$\boldsymbol{\tau}$ peker langs tommelen

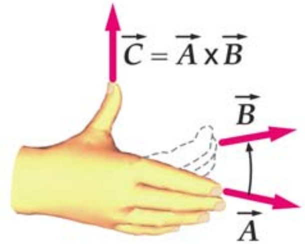
τ plasseres gjerne langs rotasjonsaksen



Vektorkryssprodukt:

Y&F Kap. 1.10

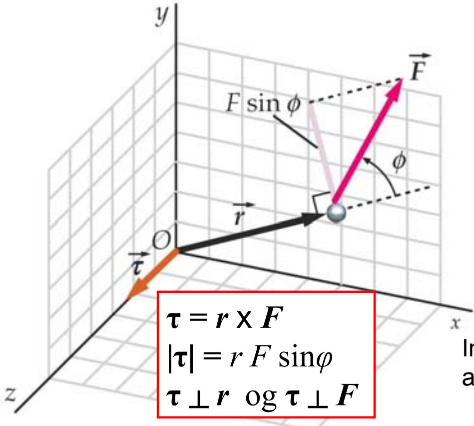




Bruker sjelden komponentform:

$$\vec{A} \times \vec{B} = [A_x, A_y, A_z] \times [B_x, B_y, B_z] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Enhver kraft på ethvert legeme
har kraftmoment om en valgt akse.
Altså τ ikke bare ved rotasjon, men mest nyttig ved rotasjon.

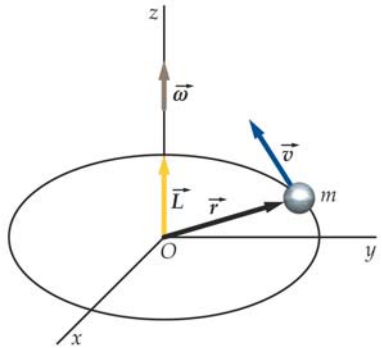


$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
$|\boldsymbol{\tau}| = r\,F \sin\varphi$
$\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{F}$

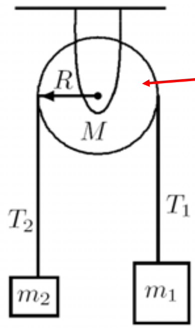
Ingen vanskelige anvendelser ☺

Translasjon:
$\boldsymbol{F} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m\,\boldsymbol{a}$

Rotasjon:
$\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = I\,\boldsymbol{\alpha}$



Atwoods (fall)maskin
Øving 5

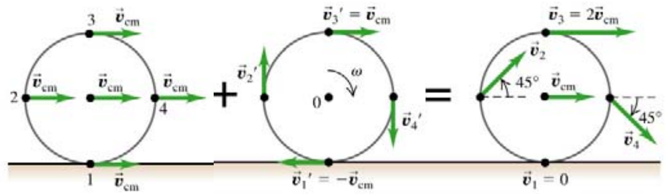


Trinsa med treghetsmoment I skal akselereres i tillegg til akselerasjon av m_2 og m_1

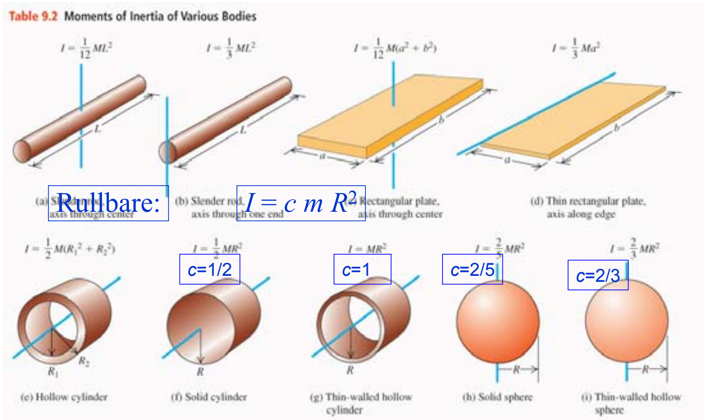
Rulling (uten å glippe)

Translasjon + rotasjon = rulling

v_{cm} $\qquad \omega \qquad$ $v_{cm} = \omega\, r$

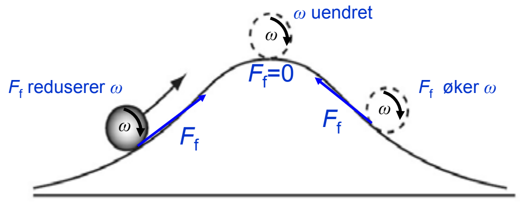


Treghetsmoment ulike skapninger:



Oppgave

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



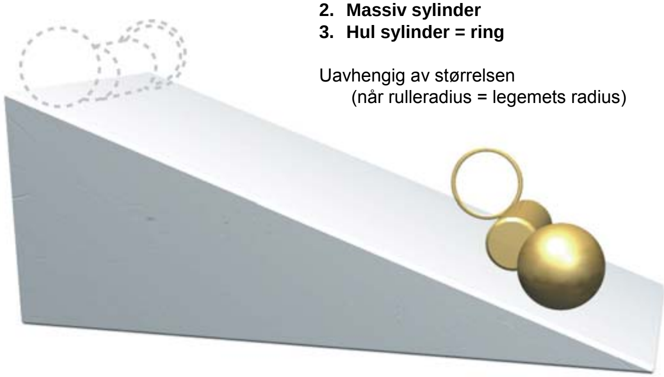
Ytre kraft ($mg \sin\alpha$) endrer v
F_f gir moment til rotasjonen

Hvilken ruller fortest:
Massiv kule
massiv sylinder, eller
hul sylinder ?

Den med minst c
i tregh.momentet $I = c\ mr^2$

1. **Kule**
2. **Massiv sylinder**
3. **Hul sylinder = ring**

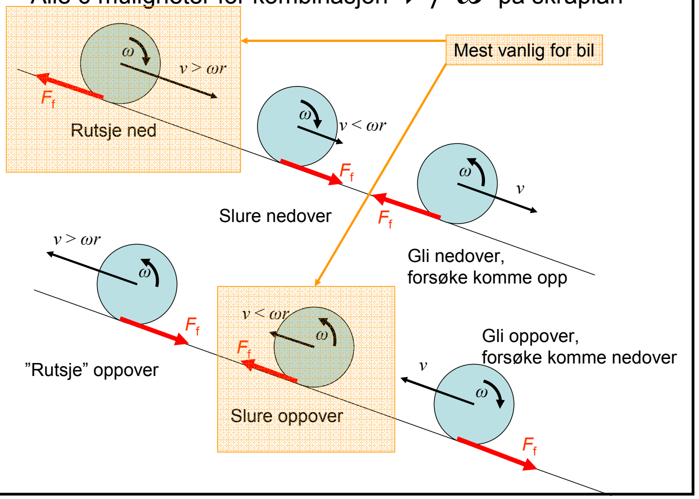
Uavhengig av størrelsen
(når rulleradius = legemets radius)



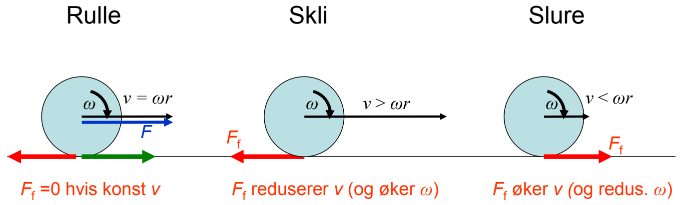
Rått egg - kokt egg.
Hvilket ruller fortest?

- http://fy.chalmers.se/~perolof/fyslek/
- (Leksaker | Mekanik | Äggkapplöpning)

Alle 6 muligheter for kombinasjon $v \neq \omega$ på skråplan



Rulle / skli / slure på flatt underlag



F_f mot venstre hvis v **øker** (F_f øker ω)
F_f mot høyre hvis v **minker** (F_f reduserer ω)
} Hvis ytre kraft F årsak til endring i v

F_f mot høyre hvis ω **øker** (akselererer, v øker)
F_f mot venstre hvis ω **minker** (bremser, v minker)
} Hvis bilmotor/hjulrotasjon årsak til endring i v

Treghetsmoment (om en gitt akse):

$$I = \Sigma\, r_i^2\, m_i \;\longrightarrow \int r^2\, \mathrm{d}m$$

- Alle I om massesentrum (cm):
- Ring om sentrum: $I = M R^2$
- Ring om diameter: $I = \frac{1}{2} M R^2$
- Sylinder eller skive om sentrum: $I = \frac{1}{2} M R^2$
- Kule om diameter: $I = (2/5) M R^2$
- Kuleskall om diameter: $I = (2/3) M R^2$

  Rullende legemer: $I = c\, mR^2$ (c=1, ½, 2/5 etc.)
- Lang, tynn stav om midtpunkt: $I = (1/12) M L^2$
- Rektangulær plate om midtpunkt: $I = (1/12) M (a^2 + b^2)$

- Om annen parallell akse i avstand d (Steiners sats):

  $I = I_{cm} + M\, d^2$

- Se også Table 9.2 i Young & Freedman.

Kap. 4+5. Rotasjon av stive legemer

Vi har sett på:

- Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, vinkelakselerasjon $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$
- Sentripetalaks. $a_c = - r\,\omega^2 = - \omega\, v = - v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = \frac{1}{2} I\, \omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i = \int r^2\, \mathrm{d}m$ (om en gitt akse)
  - Ring om sentrum: $I = M R^2$
  - Skive om sentrum: $I = \frac{1}{2} M R^2$
  - Lang, tynn stav om midtpunkt: $I = (1/12) M L^2$

  (Alle disse gjennom massefellespunktet = cm)

Vektorer: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

- Steiners sats (parallellakseteoremet):
  Treghetsmoment om annen parallell akse i avstand d:
  $I = I_0 + M\, d^2$
  dvs. I_0 er alltid det **minste** mulige treg.moment

http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_axes_rule