

Kap. 4+5 Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Tregghetsmoment I
- Kraftmoment τ
- (N2-rot) stive legemer: $\tau = I d\omega/dt$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): L
- (N2-rot) alle legemer: $\tau = dL/dt$
- Stive legemer: $L = I \omega$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m...

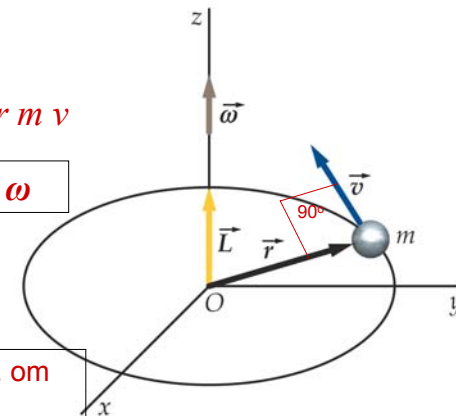
Denne uka
Spinn
(angular momentum)
Kap 5
Ch. 10.5

Spinn ved rotasjon

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{r} \Rightarrow |\mathbf{L}| = r m v$$

$$\mathbf{L} = m r^2 \boldsymbol{\omega} = I \boldsymbol{\omega}$$



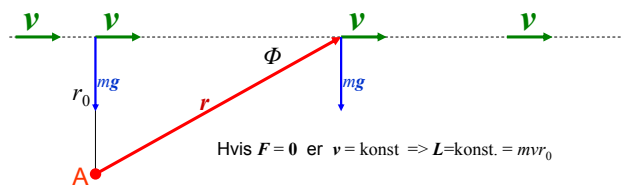
Stivt legeme, rot. om symmetriakse:

$$\mathbf{L} = \sum m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} = I \boldsymbol{\omega}$$

Spinn ved translasjon

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v}$$

$$|\mathbf{L}| = r m v \sin \phi = r_0 m v$$

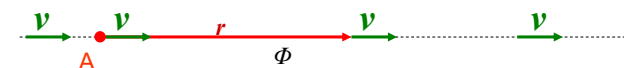


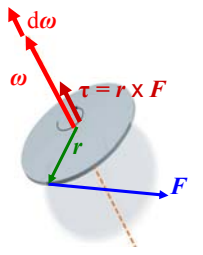
L avhengig av valgt origo A, gjennom r_0

Spinn ved translasjon

Med partikkelbanen gjennom A (origo), er $\mathbf{r} \parallel \mathbf{v}$ og:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{0}$$






Raskere rotasjon om fast akse:
 $\omega \rightarrow \omega + d\omega$ alle i samme retning
 (N2-rot): $\tau dt = I d\omega$
 $\Rightarrow \tau$ i samme retning som $d\omega$
 $\Rightarrow F$ som i figuren

Hva hvis akseretningen skal endres?

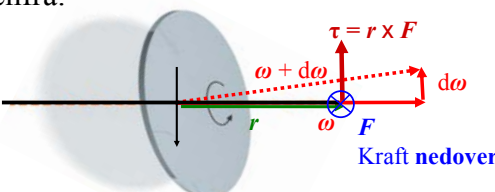
Gyroskop

1. Lodd holder hjulet i balanse
2. $I\omega$ holdes konstant når roterer
 \rightarrow gyrokompass
3. Stor motstand mot endring
4. Endring av akseretning ved kraft normalt på endringen



Endring av akseretning

Sett ovenfra:



Endring akseretning:
 $\omega \rightarrow \omega + d\omega$

(N2-rot): $\tau dt = I d\omega$
 $\Rightarrow \tau$ i samme retning som $d\omega$
 $\Rightarrow F$ nedover

Kap. 4+5. Rotasjon av stive legemer

- Tregghetsmoment $I = \sum r_i^2 m_i$ (om en gitt akse)
- Rotasjonsenergi $E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Kraftmoment: $\tau = r \times F$
- Spinn (dreieimpuls) $L = r \times m v = I \omega$
- Spinnsatsen (N2-rot): $\tau = d/dt L = I d/dt \omega$
- Ingen ytre moment (N1-rot): $L = \text{konst.}$

stive legemer:

Spinn: $L = I\omega = \text{konstant!}$

Personer inn mot sentrum: $I = \sum m_i r_i^2$ avtar ω må øke!

Ikke stivt legeme!

Kinetisk energi: $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L \omega$

$\rightarrow L$ konstant, ω øker
 $\rightarrow E_k$ øker! (hvorfra?)

Endring av akseretning
 Sett ovenfra:

Endring akseretning:
 $\omega \rightarrow \omega + d\omega$

(N2-rot): $\tau dt = I d\omega$
 $\Rightarrow \tau$ i samme retning som $d\omega$
 $\Rightarrow F$ nedover

Med vedvarende F får vi
presesering

$$d\phi = \frac{dL}{L}$$

$$\Omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dL}{dt} \frac{1}{L} = \tau \frac{1}{L} = \frac{Fr}{I\omega}$$

Sykelhjul

Ikke-roterende hjul:

Flywheel initially at rest: torque makes it rotate about y-axis (flywheel axis falls)

View from above: $\frac{d\vec{L}_x}{dt} = \vec{L}_y$

Circular motion of flywheel axis (precession)

Flywheel axis
 Rotation of flywheel ω
 Precession Ω

ing initially: t precess doesn't fall

Sett ovenfra:

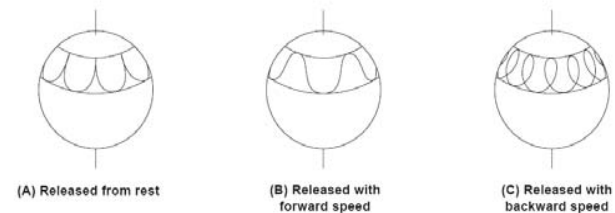
View from above: \vec{L}_y , \vec{L}_x , $d\vec{L}_x$, $d\vec{L}_y$

Matematisk forklaring av fysikken ofte eneste mulige

Richard Feynman (am. fysiker/pedagog, 1918-1988):

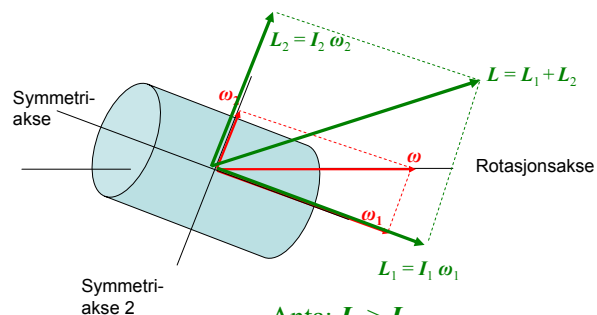
"...many simple things can be deduced mathematically more rapidly than they can really be understood in a fundamental or simple sense. This is a strange characteristic, and as we get into more and more advanced work there are circumstances in which mathematics will produce results which *no one* has really been able to understand in any direct fashion."

Nutasjon



Rotasjon om akse ikke-parallell med symmetriakse

(Ikke pensum)



Anta: $I_2 > I_1$
Da er **ikke** L parallell med ω
 L endrer altså retning under rotasjonen

Kap. 4+5. Rotasjon av stive legemer

- Treghetsmoment $I = \sum r_i^2 m_i$ (om en gitt akse)
- Rotasjonsenergi $E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Kraftmoment: $\tau = r \times F$
- Spinn (dreieimpuls) $L = r \times m v$
- Spinnsatsen (N2-rot): $\tau = d/dt L$
- Ingen ytre moment: $L = \text{konst.}$

stive legemer:

$$= I \omega$$

$$= I d/dt \omega = I \alpha$$

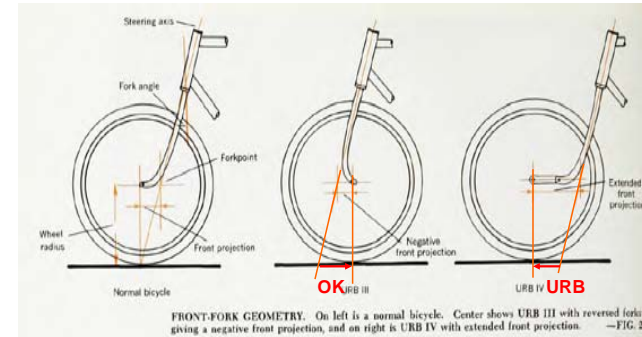
Hva betyr gyroeffekten for å holde sykkel oppe?

Mr. Jones testet dette med hjul som roterte motsatt retning, dvs. motsatt gyroeffekt.

=> En URB (UnRideableBicycle)?



URB = UnRideableBicycle!?



D.E.H. Jones. Physics Today, April 1970

"Counter-steering"

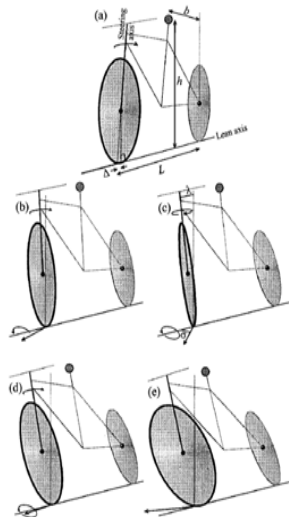
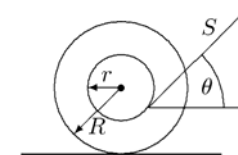


Fig 1. A counter-steered right turn, as described in the text. The bike geometry is shown in (a) and (c). The center of mass is represented by the filled circle at the location of the seat. The arcs around the steering axis and the lean axis show the direction and approximate magnitude of the torque applied to the handlebars and the net leaning torque.

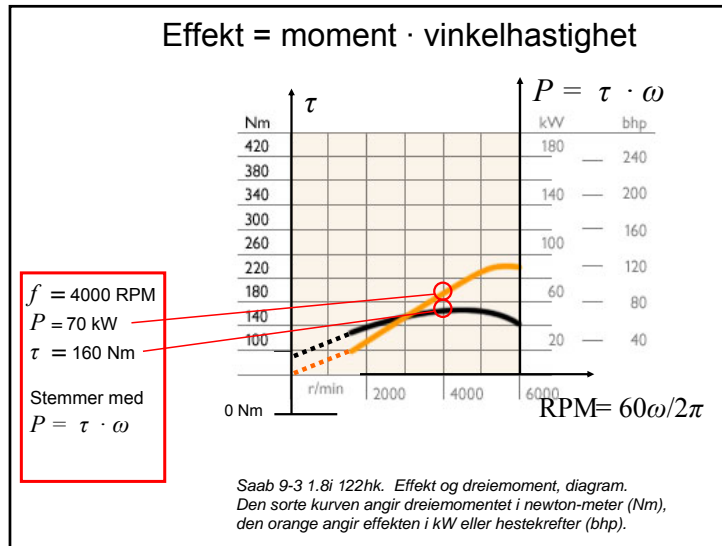
(Kort oppsummering)

Snelle med snor



- Trekkes mot deg ved liten vinkel θ
- Trekkes fra deg ved stor vinkel θ
- Vi fant: Grense ved $\cos \theta = r/R$

- Krav til statisk likevekt:
 - Ingen translasjon => $\sum \mathbf{F} = 0$
 - Ingen rotasjon => $\sum \boldsymbol{\tau} = 0$ ($\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$)
 - » om enhver valgt akse



Konstant-akselerasjonslikninger

<p>Translasjon: (konstant akselerasjon a)</p> $v = v_0 + a \cdot t$ $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$ $v^2 - v_0^2 = 2as$ $s - s_0 = \langle v \rangle t = \frac{1}{2}(v + v_0) t$	<p>Rotasjon om fast akse: (konstant vinkelakselerasjon α)</p> $\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$ $\theta - \theta_0 = \langle \omega \rangle t = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0) t$
--	---

Bowlingkule

Skli:
 $\omega = 0$

$\omega < v/R$

Rulle:
 $\omega = v_{\text{rull}}/R$

Om A: $L_A = r \times m v + I_0 \omega$
 Ingen krefter har moment
 $\Rightarrow L_A = \text{konst.} = mrv_0$
 $L_{\text{start}} = L_{\text{slutt}} \Rightarrow v_{\text{rull}} = v_0 \cdot 5/7$ (*) -- uten å kjenne F_f !

Om B: $L_B = I_0 \omega$
 $\tau_f = F_f \cdot R$
 $\Rightarrow L_B$ ikke konst. men $I_0 d\omega/dt = F_f \cdot R$, må kjenne F_f

Kap. 4+5. Rotasjon. Oppsummering.

- Vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$, vinkelakselerasjon $\alpha = d\omega/dt$
- Sentripetalakselerasjon $a_c = -r \omega^2 = -\omega v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
- Treghetsmoment $I = \sum r_i^2 m_i \rightarrow \int r^2 dm$ (om en gitt akse)
- Dreiemoment: $\tau = r \times F$
- Spinn (dreieimpuls) = $L = r \times m v$ (om en gitt akse)
 For stift legeme: $L = I \omega$
- Spinnsatsen: $\tau = dL/dt$ (Newton 2 for rotasjon)
 For stift legeme: $\tau = I d\omega/dt$
- Friksjon er vesentlig for rulling:
 - rein rulling: statisk friksjon $F_f \leq \mu_s F_N$. Friksjonsarbeidet neglisjerbart
 - slure/gli: kinetisk friksjon $F_f = \mu_k F_N$
- Eksempler: rulling, gyroskop (sykkelhjul), barnekarusell, m.m.

Translasjon:	Rotasjon:
Bevegelsesmengde (linear momentum): $p = m v$	Spinn (angular momentum): $L = r \times m v$ $L = I \omega$ Stivt legeme
N2-trans: $F = dp/dt$ "Stivt" legeme (konst. m): $F = m dv/dt = m a$	N2-rot (spinnnsatsen): $\tau = dL/dt$ Stivt legeme (konst. I): $\tau = I d\omega/dt = I \alpha$
$F = 0 \Rightarrow p = \text{konstant (N1)}$ "stivt" legeme: $v = \text{konst}$	$\tau = 0 \Rightarrow L = \text{konstant (N1-rot)}$ stivt legeme: $\omega = \text{konst}$

Kap. 4+5. Analogier translasjons- og rotasjonsbevegelser

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoordinat.	\vec{r}		θ
Hastighet	$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$	$\ddot{\vec{\theta}} = \vec{\alpha}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
"Kraft"	\vec{F}	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\tau = rF \sin \theta$
"Masse"	m		$I = \int r^2 dm$
"Bev.mengde"	$\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \vec{\omega}$	$L = r p \sin \theta = I \omega$
Kin. energi	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$		$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
Arbeid	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$	$dW = \tau d\theta$
Effekt	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	$P = \tau \omega$
Newton 2	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = I \ddot{\vec{\theta}}$	$\tau = I \ddot{\theta}$
Newton 1	$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{konst}$	$\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{konst}$	

Spinn for fallende katt bevart?

Katter lander
- alltid på føttene!

$L = 0$ ved start og ved slutt
 $L = 0$ underveis !?

