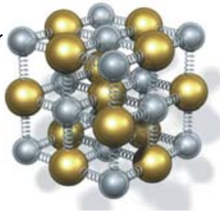
Kap. 6
Mekaniske svingninger

- **Mye svingning i dagliglivet:**
  - Pendler
  - Musikkinstrument
  - Elektriske og magnetiske svingninger
  - Klokker
  - Termiske vibrasjoner (= temperatur)
  - Måner og planeter
  - Historien og økonomien
  - m.m.
  - Farlige svingninger:



6. Mekaniske svingninger

- Vi skal se på:
- Udempet harmonisk svingning

  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$
- Dempet svingning

  $x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_d t + \varphi)$
- Tvungen svingning (resonans)
- Eksempler:
  - **Fjærpendel**
  - Matematisk pendel
  - Fysisk pendel
- Y & F: Kap. 14 (mer enn pensum)
- H & S: Kap 6 (knapt beskrevet)

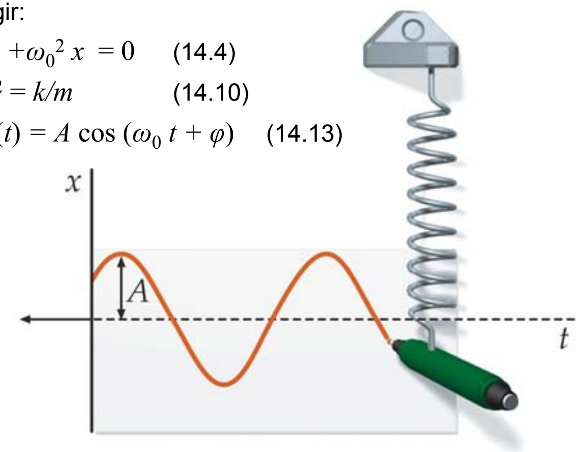
Harmonisk oscillasjon (SHM = Simple Harmonic Motion)

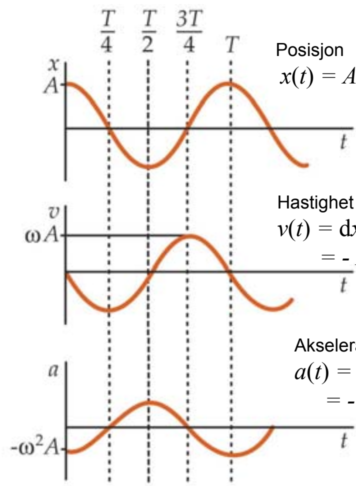
Newton 2 gir:

$\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2\, x + \omega_0^2\, x = 0$ (14.4)

der $\omega_0^2 = k/m$ (14.10)

løsning: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (14.13)





Posisjon

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (14.13)

φ = fasevinkel, (= 0 i grafen)

Hastighet

$v(t) = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$

$= - A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ (14.15)

Akselerasjon

$a(t) = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$

$= - A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$ (14.16)

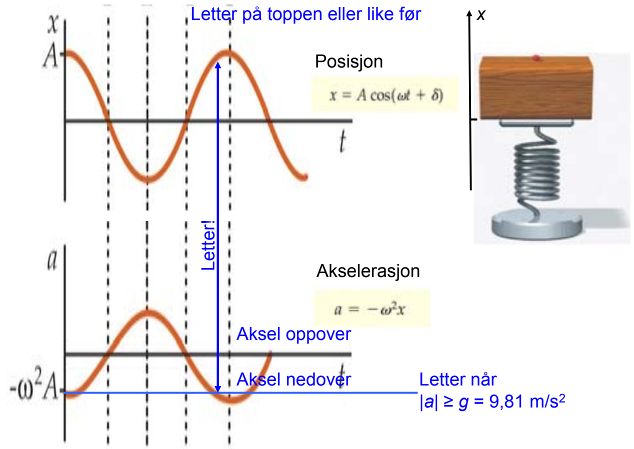
(Fjærpendel: $\omega_0^2 = k/m$)

I romfartøy:
Tyngden mangler.

Måling av masse ved SHM:

$m = k / \omega_0^2$

Kjent k
Måler ω_0



Fra en eksamen (Fysmat des. 2009) (flervalgsoppgave)

k. En pakke vaskemiddel står oppå en vaskemaskin som er i ferd med å sentrifugere på 1200 omdreininger pr minutt. Vaskemaskinen vibrerer dermed vertikalt med en amplitude på 1 mm. Vil vaskemiddelpakken på noe tidspunkt miste kontakten med underlaget? Hvorfor, evt hvorfor ikke?

A Ja, fordi vaskemaskinens maksimale akselerasjon overstiger 9.8 m/s².
B Ja, fordi vaskemaskinens maksimale hastighet overstiger 9.8 m/s.
C Nei, fordi vaskemaskinens maksimale akselerasjon aldri overstiger 9.8 m/s².
D Nei, fordi vaskemaskinens maksimale hastighet aldri overstiger 9.8 m/s.
E Nei, fordi vaskemaskinens maksimale vertikale utsving aldri overstiger 9.8 mm.

Mulige svar

SHM:
$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1200/60$ 1/s $= 40\pi$ 1/s

$a = -\omega^2 A\cos(\omega t)$
$a_{max} = \omega^2 A = (40\pi)^2 \cdot 0{,}002$ m $= 15{,}8$ m/s² $> g$ => Alt. A

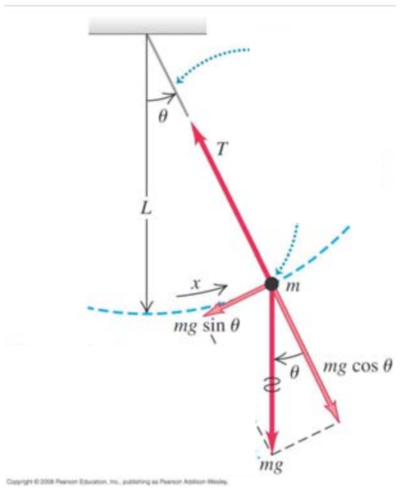
Fra eksamen des. 2003 Horisontal svingning.

Oppgave 4
En pakke med masse m er plassert på en horisontal plattform som svinger harmonisk langs bakken med periode T. Friksjonskoeffisienten mellom pakken og plattformen er μ og tyngdens akselerasjon er g. Svingeamplituden A økes nå langsomt (med konstant T).
Ved hvilken amplitude A_0 begynner pakken å skli? (Forsøk med en mynt på et papirark.)

Friksjonsbegrenset

Pakken akselereres av friksjonskrafta som er max $F_f = \mu mg$,
dvs. dens maksimale akselerasjon den kan følge er
$a_{max} = F_f / m = \mu g$.

Underlagets akselerasjon er
$a = -\omega^2 A\cos(\omega t)$, dvs. amplitudeverdi $\omega^2 A = (2\pi/T)^2 A$
Sammenholdt: $\mu g = (2\pi/T)^2 A$
=> $A_0 = \omega^2 A = \mu g\,(T/2\pi)^2$



Matematisk pendel

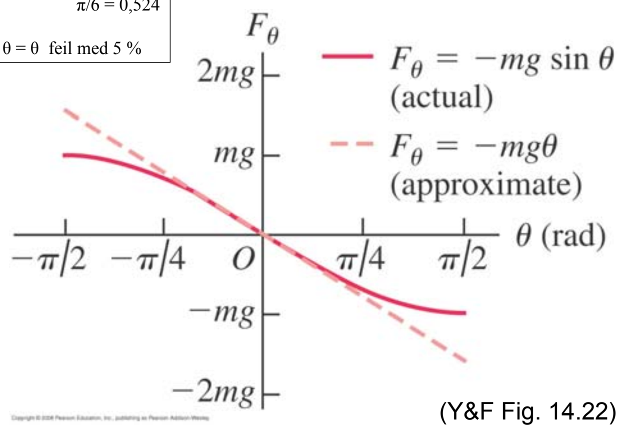
$\omega_0^2 = g/L \qquad T = 2\pi/\omega$

(Y&F Fig. 14.21b)

Feil ved f.eks. 30°:

sin 30° = sin π/6 = 0,500
π/6 = 0,524

sin θ = θ feil med 5 %



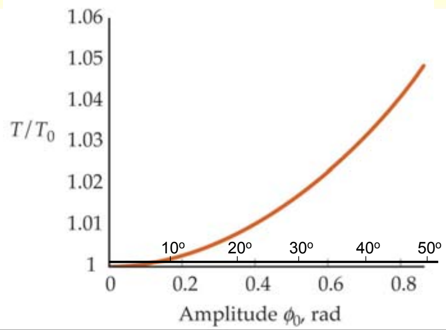
(Y&F Fig. 14.22)

Matematisk pendel $\quad T_0 = 2\pi \sqrt{(L/g)}$

Periode ved "store" vinkelamplituder Φ_0:

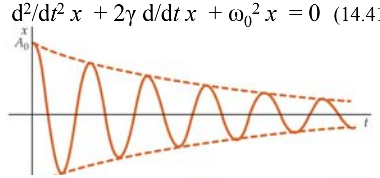
$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{1}{2}\phi_0 + \cdots\right]$$

≈ (14.35)
($\Phi \rightarrow \theta$)



6.2. Dempet svingning

Svingelikning: $d^2/dt^2\, x + 2\gamma\, d/dt\, x + \omega_0^2\, x = 0$ (14.41)



$\gamma < \omega_0$ svak dempet:

$x(t) = A\ e^{-\gamma t} \cos(\omega_d\, t + \varphi)$

$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ (14.43)

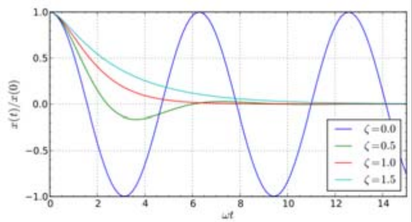
$\gamma = \omega_0$ kritisk dempet:

$x(t) = (A_1 + tA_2)\ e^{-\gamma t}$

$\gamma > \omega_0$ overkritisk dempet:

$x(t) = A_1\, e^{-\alpha t} + A_2\, e^{-\beta t}$

$\alpha = \gamma + \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)} \quad \beta = \gamma - \sqrt{(\gamma^2 - \omega_0^2)}$



$\zeta = \gamma/\omega_0$

6.3. Tvungne svingninger. Resonans

Svingelikning:

$$d^2/dt^2\, x \; + 2\gamma\; d/dt\, x \; + \omega_0^2\, x \; = \underbrace{F_0/m \cdot \cos \omega t}$$

Etter kort tid bestemmer pådrivet frekvensen:

$x(t) = A_0 \;\; \cos(\omega\, t - \delta)$

Amplitude A_0 og fase δ bestemmes av ω og γ:

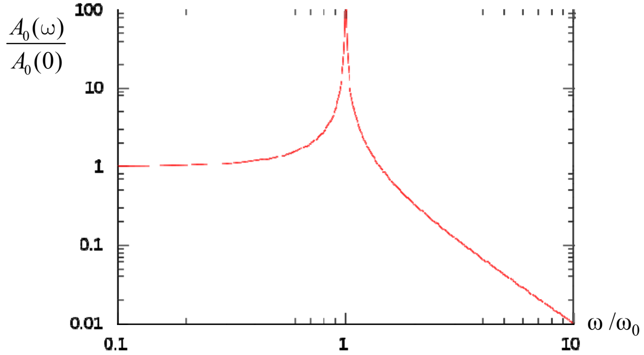
$$A_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \qquad (14.46)$$

$$\tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2}$$

Resonans (stor A_0) når $\omega = \omega_0$

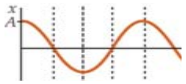
$$A_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$ i log-log-plot

med $\zeta = \gamma/\omega_0 = 1/200$ (svært svak demping)



6. Mekaniske svingninger. Oppsummering 1

- **6.1 Udempet harmonisk oscillasjon (SHM)**
  Kriterium SHM: **Krafta som trekker mot likevekt er prop. med avstand x (eks. $F = -kx$)**

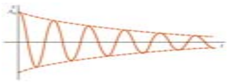


Dette gir fra Newton 2: $d^2/dt^2\, x \; + \omega_0^2\, x \; = 0$

med løsning: $x(t) = A \cos(\omega_0\, t + \varphi)$

  - masse/fjær: $\omega_0^2 = k/m$
  - tyngependel (matematisk): $\omega_0^2 = g/l$
  - fysisk pendel: $\omega_0^2 = mgl/I$ (seinere)

- **6.2 Dempet harmonisk oscillasjon**



  $d^2/dt^2\, x \; + 2\gamma\; d/dt\, x \; + \omega_0^2\, x \; = 0$

  med løsning: $x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_d\, t + \varphi)$

  (svak dempning $\gamma < \omega_0$) $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

6. Mekaniske svingninger. Oppsummering 2

6.3 Tvungen svingning (resonans)

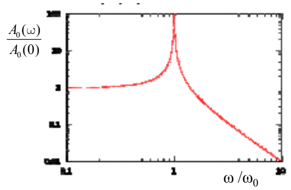
- $d^2/dt^2\, x \; + 2\gamma\; d/dt\, x \; + \omega_0^2\, x \; = F_0/m \cdot \cos \omega t$

  med løsning $x(t) = A_0 \;\; \cos(\omega\, t - \delta)$

$$A_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

$$\tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2}$$

Resonans (stor A_0) når $\omega = \omega_0$



Mer om energi seinere:

- Totalenergien $E_{tot} = E_k(t) + E_p(t)$ er konstant og svinger mellom $E_k(t)$ og $E_p(t)$
- $E_p(t)$ prop. med x^2 for alle svingninger
  Fjærpendel: $E_p(t) = ½\, k\, x^2$