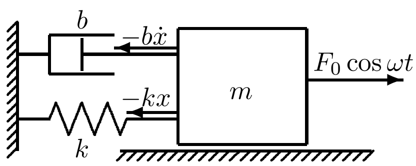
Inst. fysikk 2012

TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)
Notat tvungen svingning

En tvungen, dempet svingning kan skrives (se krefter i figur):



$$\begin{aligned} -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{F_0}{m}\cos \omega t \\ \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= f_0 \cos \omega t \qquad (1) \end{aligned}$$

Likn. (1) er en ikke-homogen, andreordens differensiallikning med konstante koeffisienter og behandles i matematikken. Den generelle løsningen kan uttrykkes

$$x(t) = x_{\rm h}(t) + x_{\rm p}(t)$$

der $x_{\rm h}$ er en løsning av den homogene likningen (høyre side = 0) og $x_{\rm p}$ er én partikulær løsning. Den homogene likningen er lik den dempede svingelikningen med løsning (for svak demping): $x_{\rm h}(t) = x_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_{\rm d} t + \phi)$. Hvis eksitasjonen $F_0 \cos \omega t$ vedvarer vil etter en viss tid $x_{\rm h}(t)$ dempes ut. Dermed står $x_{\rm p}(t)$ igjen å finne.

Vi velger å skrive harmoniske variasjoner (cos eller sin) med kompleks notasjon. Dvs. vi erstatter:

$$\cos(\omega t + \phi) \rightarrow e^{i(\omega t + \phi)} = e^{i\phi}\, e^{i\omega t}.$$

For pådraget er fasevinkelen $\phi = 0$ slik at

$$f_0 \cos(\omega t) \rightarrow f_0\, e^{i\omega t}.$$

Løsningen $x_{\rm p}(t)$ må følge samme frekvens som pådraget men med en fasevinkel δ, dvs. løsningen må kunne skrives på form ($+\delta$ eller $-\delta$ er en smakssak, vi velger $-\delta$):

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t - \delta) \rightarrow A_0 e^{-i\delta}\, e^{i\omega t} = A\, e^{i\omega t}.$$

Her er A_0 (reell) amplityde, fasevinkelen er $-\delta$ og disse skal bestemmes som vi gjør gjennom å bestemme den komplekse amplityden $A = A_0 e^{-i\delta}$. Til dette har vi følgende uttrykk

$$\begin{aligned} x(t) &= A\, e^{i\omega t} \\ \dot{x}(t) &= i\omega A\, e^{i\omega t} \\ \ddot{x}(t) &= i\omega \cdot i\omega A\, e^{i\omega t} = -\omega^2 A\, e^{i\omega t} \end{aligned}$$

som vi setter inn i svingelikningen (1) og får

$$-\omega^2 A\, e^{i\omega t} + 2\gamma i\omega A\, e^{i\omega t} + \omega_0^2 A\, e^{i\omega t} = f_0\, e^{i\omega t}. \qquad (2)$$

Likningen skal gjelde alle t, slik at vi kan forkorte $e^{i\omega t}$. Dette gir følgende likning

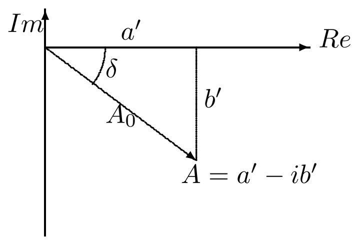
$$A \cdot \left(\underbrace{\omega_0^2 - \omega^2}_{=a} \quad + \quad i\ \underbrace{2\gamma\omega}_{=b} \right) = f_0.$$

Innfører hjelpestørrelsene a og b som vist, og da bestemmes den komplekse størrelsen A:

$$A = \frac{f_0}{a + ib} = \frac{f_0}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{f_0 a}{a^2 + b^2} - i\frac{f_0 b}{a^2 + b^2} = a' - ib'$$

idet $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ og vi har innført $a' = \frac{f_0 a}{a^2+b^2}$ og $b' = \frac{f_0 b}{a^2+b^2}$ for i det videre å spare skrivearbeid.

På kompleks polarform (figur til høyre) skrives A:



$$A = A_0 \cdot e^{-i\delta}$$

der

$$\underline{\tan \delta = \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

og

$$\underline{A_0} = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{\left(\frac{f_0 a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{f_0 b}{a^2 + b^2}\right)^2} = \frac{f_0}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{f_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \underline{\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}}.$$

Den tvungne svingning har altså forløp

$$x(t) = A\, e^{i\omega t} = \underline{A_0 e^{-i\delta}\, e^{i\omega t}}$$

med $A_0(\omega)$ og $\delta(\omega)$ som angitt.

Utledningen er ikke pensum, men resultatet og analysene av $A_0(\omega)$ er pensum.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 12. sep. 12.