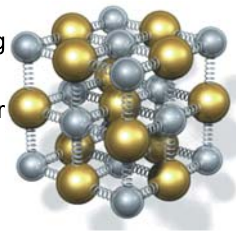
# Kap. 14
# Mekaniske svingninger

- **Mye svingning i dagliglivet:**
  - Pendler
  - Musikkinstrument
  - Elektriske og magnetiske svingning
  - Klokker
  - Termiske vibrasjoner (= temperatur
  - Måner og planeter
  - Historien og økonomien
  - m.m.
  - Farlige svingninger:



## 14. Mekaniske svingninger

- Vi skal se på:
- 14.1-6. Udempet harmonisk svingning

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- 14.7. Dempet svingning

$$x(t) = A\,e^{-\gamma t}\cdot\cos(\omega_d t + \varphi)$$

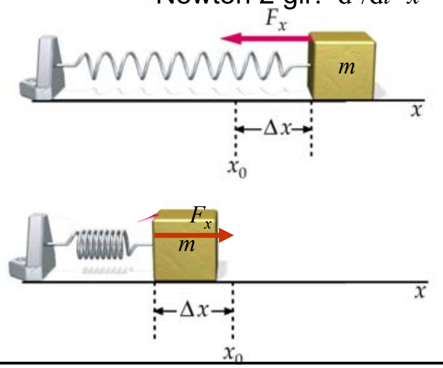
- 14.8. Tvungen svingning (resonans)
- Eksempler:
  - **Fjærpendel**
  - Matematisk pendel
  - Fysisk pendel
- Y & F: Kap. 14 (mer enn pensum)
- H & S: Kap 6 (litt kortfattet)

## Harmonisk oscillasjon (SHM = Simple Harmonic Motion)

Eks: Masse-fjær-pendel (friksjonsfri)

Fjærkrefter: $F_x = -k\,\Delta x$

Newton 2 gir: $d^2/dt^2\,x + k/m\,x = 0$ (14.4)

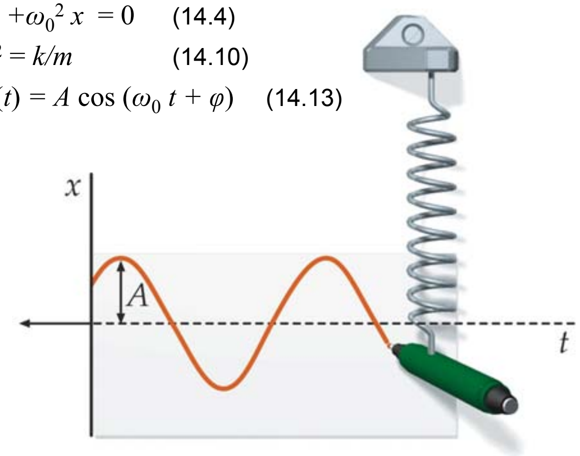


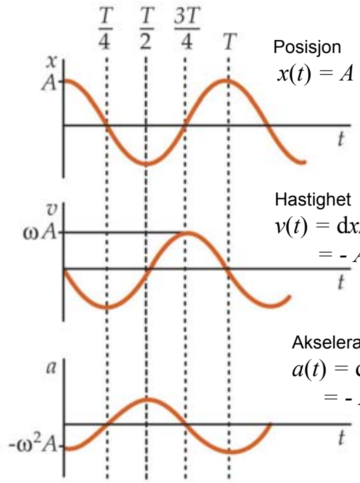

Newton 2 gir:

$d^2/dt^2\,x + \omega_0^2\,x = 0$ (14.4)

der $\omega_0^2 = k/m$ (14.10)

løsning: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ (14.13)






Posisjon

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ (14.13)

$\varphi$ = fasevinkel, (= 0 i grafen)

Hastighet

$v(t) = dx/dt$

$= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ (14.15)

Akselerasjon

$a(t) = dv/dt$

$= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$ (14.16)

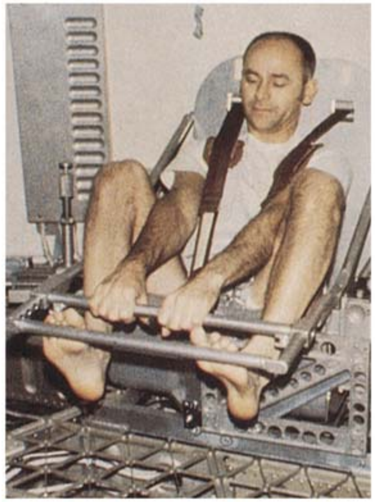
(Fjærpendel: $\omega_0^2 = k/m$ )

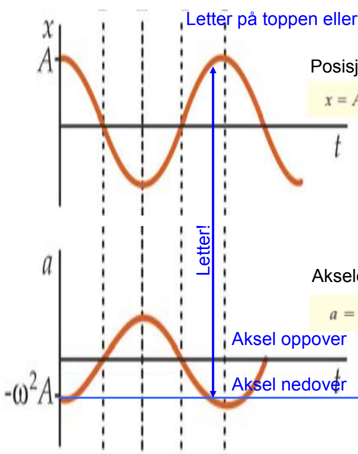
I romfartøy:
Tyngden mangler.

Måling av masse ved SHM:

$m = k / \omega_0^2$

Kjent $k$
Måler $\omega_0$





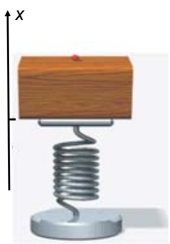

Posisjon

$x = A\cos(\omega t + \delta)$

Akselerasjon

$a = -\omega^2 x$

Letter når
$|a| \geq g$ = 9,81 m/s²




## Fra en eksamen (Fysmat des. 2009)
## (flervalgsoppgave)

- Ei pakke vaskemiddel står oppå en vaskemaskin som er i ferd med å sentrifugere på 1200 omdreininger per minutt. Vaskemaskinen vibrerer dermed vertikalt med en amplitude på 1,0 mm. Vil vaskemiddelpakka på noe tidspunkt miste kontakten med underlaget? Hvorfor, evt. hvorfor ikke?

A. Ja, fordi vaskemaskinens maksimale akselerasjon overstiger 9,8 m/s².
B. Ja, fordi vaskemaskinens maksimale hastighet overstiger 9,8 m/s.
C. Nei, fordi vaskemaskinens maksimale akselerasjon aldri overstiger 9,8 m/s².
D. Nei, fordi vaskemaskinens maksimale hastighet aldri overstiger 9,8 m/s.
E. Nei, fordi vaskemaskinens maksimale vertikale utsving aldri overstiger 9,8 mm.

Mulige svar

SHM:

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1200/60$ 1/s $= 40\pi$ 1/s

$x = A\cos(\omega t) \Rightarrow a = d^2x/dt^2 = -\omega^2 A\cos(\omega t)$

$a_{max} = \omega^2 A = (40\pi)^2 \cdot 0{,}002$ m $= 15{,}8$ m/s² $> g \Rightarrow$ Alt. A

## Fra eksamen (Fysmat des. 2003) Horisontal svingning.

**Oppgave 4**
En pakke med masse $m$ er plassert på en horisontal plattform som svinger harmonisk langs bakken med periode $T$. Friksjonskoeffisienten mellom pakken og plattformen er $\mu$ og tyngdens akselerasjon er $g$. Svingeamplituden $A$ økes nå langsomt (med konstant $T$).
Ved hvilken amplitude $A_0$ begynner pakken å skli? (Forsøk med en mynt på et papirark.)

Friksjonsbegrenset

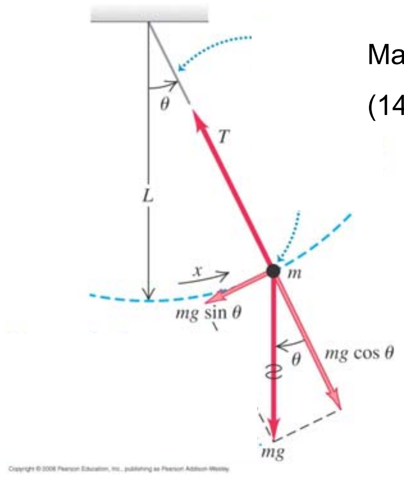
Pakken akselereres av friksjonskrafta som er max $F_f = \mu mg$,
dvs. dens maksimale akselerasjon den kan følge er
$a_{max} = F_f/m = \mu g$ .

Underlagets akselerasjon er
$a = -\omega^2 A \cos(\omega t)$, dvs. amplitudeverdi $\omega^2 A = (2\pi/T)^2 A$
Sammenholdt: $\mu g = (2\pi/T)^2 A$
=> $A_0 = \omega^2 A = \mu g\, (T/2\pi)^2$

## Matematisk pendel

(14.5 Simple pendulum)

$$\omega_0^2 = g/L \qquad T = 2\pi/\omega$$

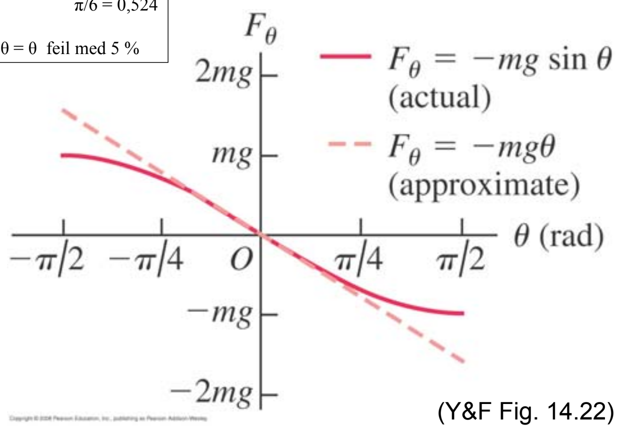



(Y&F Fig. 14.21b)

Feil ved f.eks. 30°:

sin 30° = sin π/6 = 0,500
π/6 = 0,524

sin θ = θ feil med 5 %



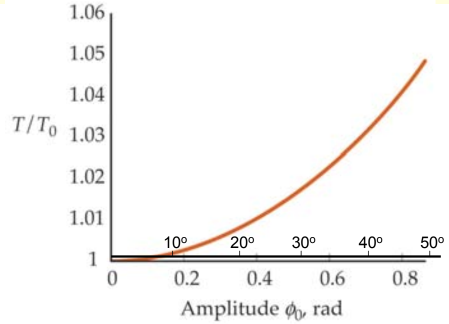

(Y&F Fig. 14.22)

## Matematisk pendel $T_0 = 2\pi\sqrt{(L/g)}$

Periode ved "store" vinkelamplituder $\Phi_0$:

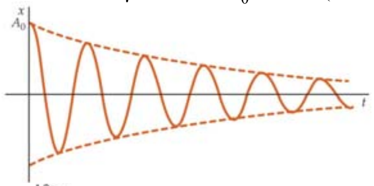
$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{1}{2}\phi_0 + \cdots\right]$$

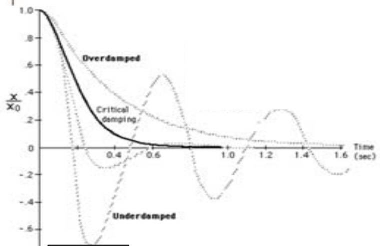
≈ (14.35)
($\Phi \to \theta$)



## 14.7. Dempet svingning

Svingelikning: $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2\, x + 2\gamma\, \mathrm{d}/\mathrm{d}t\, x + \omega_0^2\, x = 0$ (14.41)






$\gamma << \omega_0$ svak dempet:

$x(t) = A\ e^{-\gamma t} \cos(\omega_d\, t + \varphi)$

$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ (14.43)

$\gamma = \omega_0$ kritisk dempet:

$x(t) = (A_1 + tA_2)\ e^{-\gamma t}$

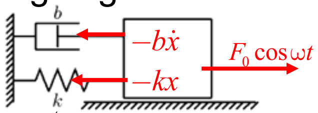
$\gamma > \omega_0$ overkritisk dempet:

$$x(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \qquad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Fra: www.mwit.ac.th/~physicslab/hbase/oscda2.html

## 14.8. Tvungne svingninger. Resonans




Svingelikning:

$\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2\, x + 2\gamma\, \mathrm{d}/\mathrm{d}t\, x + \omega_0^2\, x = f_0 \cdot \cos \omega t$

Etter kort tid bestemmer pådraget frekvensen:

$x(t) = A_0 \cos(\omega\, t - \delta)$

Amplitude $A_0$ og fase $\delta$ bestemmes av $\omega$ og $\gamma$:

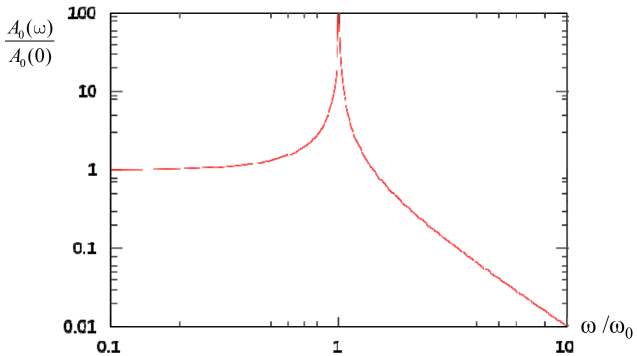
$$A_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \qquad (14.46)$$

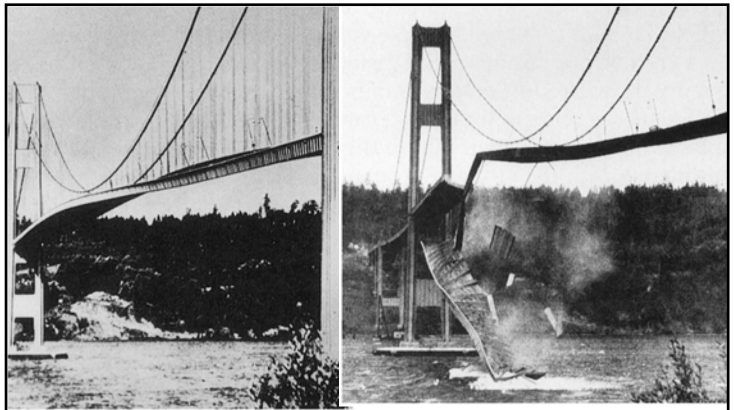
$$\tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Resonans (stor $A_0$) når $\omega = \omega_0$

$$A_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \text{ i log-log-plot}$$

med $\zeta = \gamma/\omega_0 = 1/200$ (svært svak demping)

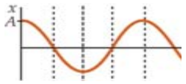


Tacoma Narrows Bridge on the morning of Nov. 7, 1940. The bridge was an unusually light design, and, as engineers discovered, peculiarly sensitive to high winds. Rather than resist them, as most bridges do, the Tacoma Narrows tended to sway and vibrate. On November 7, in a 40-mile-per-hour wind, the center span began to sway, then twist. The combined force of the winds and internal stress was too great for the bridge, and it self-destructed. No one was killed, as the bridge had been closed because of previous swaying. This is one of the best-known and most closely studied engineering failures, thanks in large part to the film and photographs that recorded the collapse. Full video: http://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw

## 14. Mekaniske svingninger. Oppsummering 1

- **Udempet harmonisk oscillasjon (SHM)**
  Kriterium SHM: **Krafta som trekker mot likevekt er prop. med avstand $x$ (eks. $F = - kx$ )**

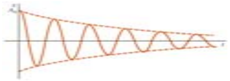


Dette gir fra Newton 2: $d^2/dt^2\, x + \omega_0^2\, x = 0$

med løsning: $x(t) = A \cos(\omega_0\, t + \varphi)$

- masse/fjær: $\omega_0^2 = k/m$
- tyngependel (matematisk): $\omega_0^2 = g/l$
- fysisk pendel: $\omega_0^2 = mgl/I$ (seinere)

- **Dempet harmonisk oscillasjon**



$d^2/dt^2\, x + 2\gamma\, d/dt\, x + \omega_0^2\, x = 0$

med løsning: $x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_d\, t + \varphi)$

(svak dempning $\gamma < \omega_0$) $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$

## 14. Mekaniske svingninger. Oppsummering 2

**Tvungen svingning (resonans)**

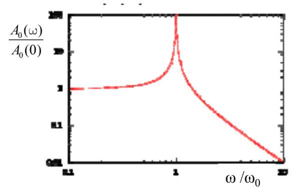
- $d^2/dt^2\, x + 2\gamma\, d/dt\, x + \omega_0^2\, x = F_0/m \cdot \cos \omega t$

med løsning $x(t) = A_0 \cos(\omega\, t - \delta)$

$$A_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

$$\tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Resonans (stor $A_0$) når $\omega = \omega_0$




Mer om energi seinere:

- Totalenergien $E_{tot} = E_k(t) + E_p(t)$ er konstant og svinger mellom $E_k(t)$ og $E_p(t)$
- $E_p(t)$ prop. med $x^2$ for alle svingninger
  Fjærpendel: $E_p(t) = ½\, k\, x^2$