

### Kap. 8

Bevegelsesmengde. Kollisjoner. Massesenter.

**Vi skal se på:**

- Newtons 2. lov på ny: Definisjon bevegelsesmengde
- Kraftstøt, impuls. Impulsloven
- Kollisjoner:
  - Elastisk, uelastisk, fullstendig uelastisk
- Massesenter (tyngdepunkt)
- Rakettilikningen (variabel masse).

### Kollisjoner skjer så raskt at vi kan se bort fra ytre krefter under kollisjonen

Hvor store er kreftene?

$m = 56 \text{ g}$   
 $v = 50 \text{ m/s} \rightarrow v = -50 \text{ m/s}$   
 anta på  $t = 0,005 \text{ s}$

=>

$F_{\text{av}} = \Delta p / \Delta t = 1120 \text{ N}$   
 $F_{\text{max}} \approx 2000 \text{ N}$

Ytre kraft = tyngde =  $mg = 0,56 \text{ N}$   
 er forsvinnende liten

$F_{\text{max}}$  for stor

### Kap. 8.

Bevegelsesmengde. Flerpartikkelsystem.

- Bevegelsesmengde:  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$
- Opprinnelig form Newton 2:  $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$
- Kraftstøt =  $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$  (impulsloven)  $\sum \mathbf{F}_{\text{ytre}} = 0$
- Ingen ytre krefter =>  $\mathbf{p}_{\text{tot}} = \text{konstant}$ 
  - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legeme

• **Flerpartikkelsystem, kollisjoner.**

• **Tilleggslikninger:**

- Elastisk støt: Kinetisk energi bevart
- Uelastisk støt: Ingen generell tilleggslikning. (Energi avtar)
- Fullstendig uelastisk støt: Felles slutfart. (Energi avtar)

### Tre klasser kollisjoner

(eksempel: kast mot vegg)

$v_B = v_B' = 0$  Elastisk

$v_B = v_B' = 0$  Uelastisk

Fullstendig uelastisk  $v_B = v_B' = 0$

$v_A' = v_B' = v'$

Alle kollisjoner:  $m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$  (100)

Fullstendig uelastisk med  $m_B \gg m_A$  og  $v_B = 0$  (vegg)

$v' = 0$

Likevel er  $p$  bevart!  
( $m_A v_A = m_B v' = \infty \cdot 0$ )

### Så langt om kollisjoner:

- Kraftstøt =  $J = \int F dt = \Delta p$  (impulsloven)
- Antar ingen ytre krefter i selve kollisjonen  
=> Bevegelsesmengde er bevart:  
 $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$  (100)

**Tilleggslikninger:**

- Elastisk støt: Kinetisk energi bevart:  
 $m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v'^2_A + m_B v'^2_B$  (101)

**Løsning:**

$$v'_A = \frac{(m_A - m_B)v_A + 2m_B v_B}{m_A + m_B} \quad (103)$$

$$v'_B = \frac{(m_B - m_A)v_B + 2m_A v_A}{m_B + m_A} \quad (104)$$

**Y&F: Ex. 8.8: Fullstendig uelastisk støt "Ballistisk pendel":**

BEFORE COLLISION

IMMEDIATELY AFTER COLLISION

TOP OF SWING

To ukjente:  
 $v_1$  og fellesfarten  $v = v_1' = v_2'$

To likninger:  
Impulsbevarelse **under** støtet og energibevarelse **etter** støtet

$$m_B v_1 + m_W \cdot 0 = (m_B + m_W) v'$$

$$\frac{1}{2} m_B v_1^2 + \frac{1}{2} m_W \cdot 0^2 = \frac{1}{2} (m_B + m_W) v'^2$$

$v = v_1' = v_2'$

### Delvis uelastisk støt

Tre ukjente: Før støt:  $v_1$ . Etter støt:  $v_1'$  og  $v_2'$

To likninger: Impulsbevarelse **under** støtet og energibevarelse **etter** støtet.

Tilleggsopplysning: F.eks. oppgitt kulas fart etter støt:  $v_1' = \frac{1}{2} v_1$  (evt. kunne tap i energi være oppgitt)

**Eks. Massesenter**

Eks. 1. Halvsirkel

$dm = \lambda ds$   
 $[\lambda] = \text{kg} / \text{m}$

$y_{\text{cm}} = r 2/\pi = 0,64 r$

Eks. 2. Halv sirkelplate:

$dm = \sigma dA$   
 $[\sigma] = \text{kg} / \text{m}^2$

$y_{\text{cm}} = r 4/(3\pi) = 0,42 r$

### Massesenter

- Topartikkelsystem  $\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$
- N-partikkelsystem  $\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$  (8.29)
- Kontinuerlig  $\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\int_{\text{legeme}} \vec{r} \cdot dm}{\int_{\text{legeme}} dm} = \frac{1}{M} \int_{\text{legeme}} \vec{r} \cdot dm$  (8.29B)

1-dim: Integrasjon langs linje:  $dm = \lambda ds$ . Eks:

2-dim: Integrasjon over plan:  $dm = \sigma dA$ . Eks:

3-dim: Integrasjon over volum:  $dm = \rho dV$ . Eks:

### Fullstendig elastisk støt

Rød = massesenter  $r_{\text{cm}}$

543 gm      209 gm

Ingen ytre krefter =>  $M d/dt \vec{r}_{\text{cm}} = \vec{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$   
=> Massesenteret  $r_{\text{cm}}$  fortsetter upåvirket under støtet.  
Relativbevegelsen (gult) endres under støtet.

### Kap. 8. Massesenter

- *Tyngdepunkt = massesenter*  
dersom tyngdeaksel.  $\mathbf{g}$  er lik over hele legemet
- Newtons lov for massesenter:  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \mathbf{a}_{\text{cm}}$
- Tyngdens pot. en:  $E_p = gM z_{\text{cm}}$

## Kap. 8. Oppsummert

### Bevegelsesmengde. Flerpartikkelsystem.

- Massesenter  $\vec{r}_{cm} = \int \vec{r} dm/M$ .
- Bevegelsesmengde:  $\vec{p} = m \vec{v}$
- Opprinnelig form Newton 2:  $\vec{F} = d\vec{p} / dt$
- Kraftstøt =  $\vec{J} = \int \vec{F} dt = \Delta\vec{p}$  (impulsloven)
- Ingen ytre krefter =>  $\vec{p}_{tot} = \text{konstant}$ 
  - Kraftstøt motsatt like stort på hvert legeme
- **Flerpartikkelsystem, kollisjoner.**
- **Tilleggslikninger:**
  - Elastisk støt: Kinetisk energi bevart
  - Uelastisk støt: Ingen generell tilleggslikning. (Energi avtar)
  - Fullstendig uelastisk støt: Felles slutfart. (Energi avtar)
- Newtons lov for massesenter:  $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_{cm}$
- Tyngdens pot. en:  $E_p = gM z_{cm}$
- Ikke konstant masse: Rakettlikningen  $m dv/dt = F_Y + u_{ex} dm/dt$

## Kap 8. Oppsummert: Massesenter

- **Punktpartikkel:** all masse i ett punkt
- **Flerpartikkelsystem:**  
Legeme =  $\sum$  punktpartikler  
(nødvendig mhp. rotasjon, bøyning, deformasjon)
- **Massesenter  $\vec{r}_{cm}$ :**
- Topartikkelsyst.  $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$
- N-partikkelsyst.  $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$  (8.29)
- Kontinuerlig  $\vec{r}_{cm} = \frac{\int_{legeme} \vec{r} \cdot dm}{\int_{legeme} dm} = \frac{1}{M} \int_{legeme} \vec{r} \cdot dm$  (8.29B)
- **Tyngdepunkt = massesenter** dersom  $\vec{g}$  er lik over hele legemet

1-dim: Integrasjon langs linje:  $dm = \lambda ds$ .

2-dim: Integrasjon over plan:  $dm = \sigma dA$ .

3-dim: Integrasjon over volum:  $dm = \rho dV$ .