Kap. 9+10
Rotasjon av stive legemer

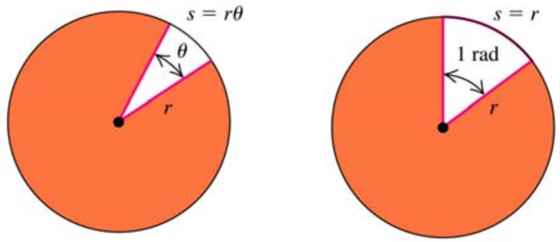
Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rask rekap)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rask rekap)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Rulling
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):

  $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

Vinkler måles i radianer:

$\theta = s/r$ dvs. $s = r\theta$

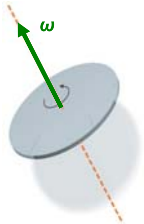


Vinkelhastighet:

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$

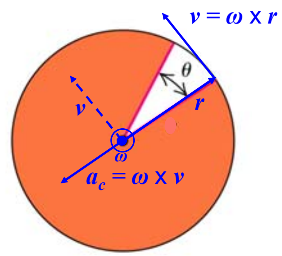
Viktige størrelser (rotasjon)

- Vinkelpos. $\theta = s/r$
- Vinkelfart $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = v/r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{\omega}$ langs akseretning
- Periode T = tid/omdr = $1/f$
- Frekvens $f = 1/T$
- Vinkelfrekvens = vinkelfart = $\omega = 2\pi f$
- Vinkelaksel. $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}^2t$
- Banefart $v = |v| = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \omega r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
- Baneaksel. $a_t = \alpha\, r$
- Sentr.aksel. $a_c = v^2/r = \omega^2 r$
  - Vektorstørrelse: $\vec{a}_c = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$
  - Total aksel = $\vec{a} = -a_c\hat{r} + a_t\hat{\theta}$



Vektorer: $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$\vec{a}_c = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$



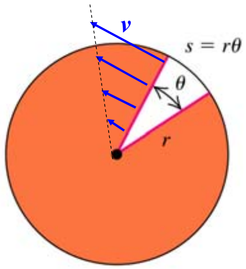
Lik for hele legemet:

Vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$

Vinkelaksel. $\alpha = d\omega/dt$

Øker med radien r :

Banefart $v = ds/dt = \omega r$

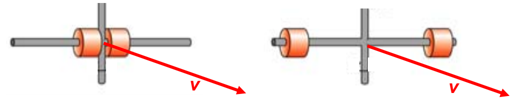


Tang.aksel. $a_t = \alpha r$

Sentr.aksel. $a_c = \omega^2 r$

- Translasjon: $E_k = ½\, m\, v^2$

Massens plassering ingen betydning for E_k

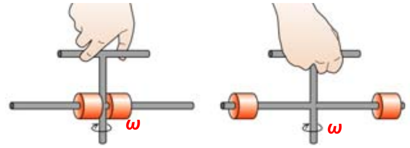


Samme v ,
samme E_k

- Rotasjon: $E_k = ½\, I\, \omega^2$

der $I = \int r^2\, dm$

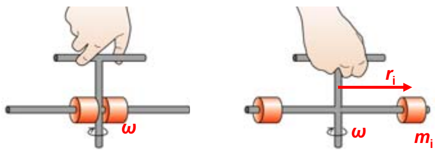
E_k øker med (massens avstand)^2 fra aksen



Samme ω, men ulik E_k

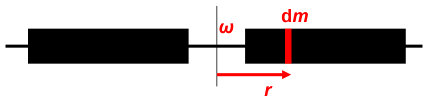
$E_k = ½\, I\, \omega^2$

$I = \Sigma\, r_i^2 m_i$



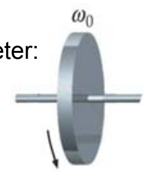
Her må vi integrere:

$I = \int r^2\, dm$



Rotasjonshjul som energilager

- Stålskive 10 cm tykk, 1,0 m diameter:



Problem:
Tung! (600 kg)
Deformeres:
I periferien er
Banefart $v=\omega r=1000$ m/s
Sentripetalaksel $\omega^2 r = 220000xg$)

- Energi ved 20000 RPM (omdr. per min):
  $E_k = ½\, I\, \omega^2 = 170$ MJ

- Forbrenningsenergi i bensintank på 40 liter,
  ved utnyttelse 33%: ca 530 MJ

Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

Vi har sett på:

- Vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$, vinkelakselerasjon $\alpha = d\omega/dt$
- Banehastighet $v = r\,\omega$
- Sentripetalaks. $a_c = -r\,\omega^2 = -\omega\,v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = ½\, I\,\omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i = \int r^2\, dm$ (om en gitt akse)
  - Ring om sentrum: $I = M\, R^2$
  - Skive om sentrum: $I = ½\, M\, R^2$
  - Lang, tynn stav om midtpunkt: $I = (1/12)\, M\, L^2$

  (Alle disse gjennom massefellespunktet = cm)

Vektorer: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

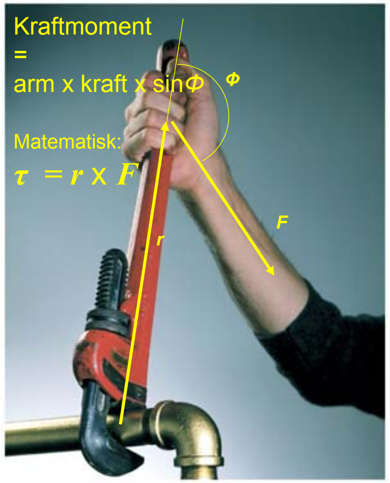
- Steiners sats (parallellakseteoremet):
  Treghetsmoment om annen parallell akse i avstand d:
  $I = I_0 + M\, d^2$
  dvs. I_0 er alltid det **minste** mulige treg.moment

http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_axes_rule

Kap. 9+10 Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- (N2-rot) stive legemer: $\boldsymbol{\tau} = I\, d\boldsymbol{\omega}/dt$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- (N2-rot) alle legemer: $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\, d\boldsymbol{\omega}/dt$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

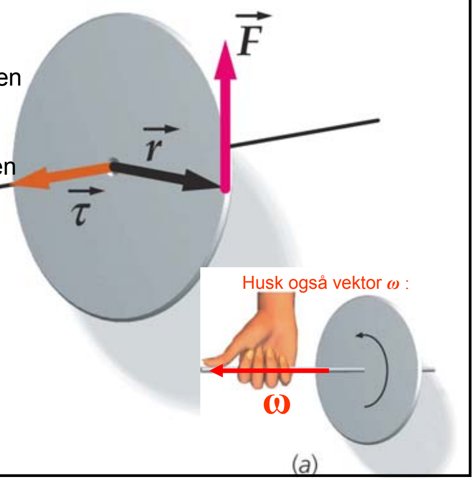


$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}}$

Høyrehåndsregelen:

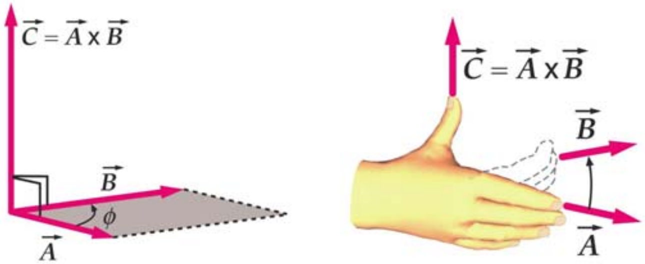
$\boldsymbol{\tau}$ peker langs tommelen

τ plasseres gjerne langs rotasjonsaksen



Vektorkryssprodukt:

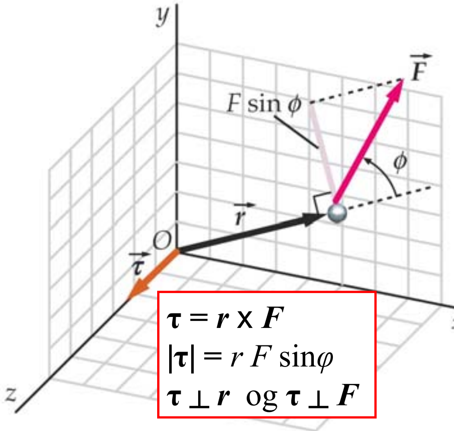
Y&F Kap. 1.10



Bruker sjelden komponentform:

$$\vec{A} \times \vec{B} = [A_x, A_y, A_z] \times [B_x, B_y, B_z] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

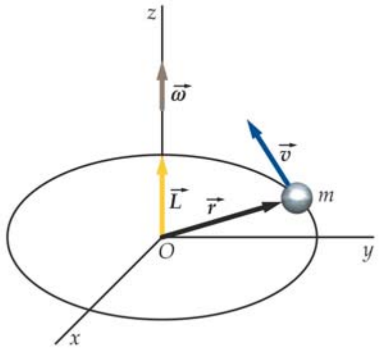
Enhver kraft på ethvert legeme
har kraftmoment om en valgt akse.
Altså τ ikke bare ved rotasjon, men mest nyttig ved rotasjon.



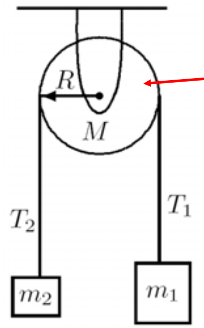
$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
$|\boldsymbol{\tau}| = r\,F \sin\varphi$
$\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{F}$

Ingen vanskelige anvendelser ☺

Translasjon:	Rotasjon:
$\boldsymbol{F} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m\,\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\tau} = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = I\,\boldsymbol{\alpha}$



Atwoods (fall)maskin
Øving 6

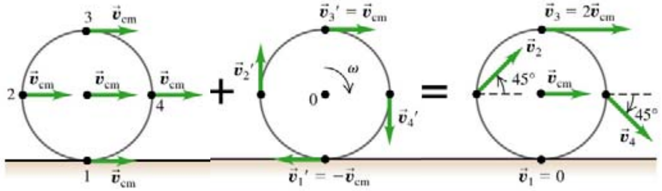


Trinsa med treghetsmoment *I* skal akselereres i tillegg til akselerasjon av m_2 og m_1

Rulling (uten å glippe)

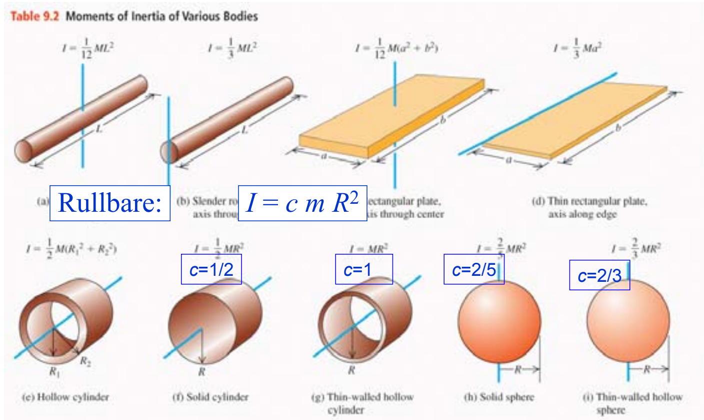
Translasjon + rotasjon = rulling

v $\quad\omega\quad$ $v = \omega\, r$



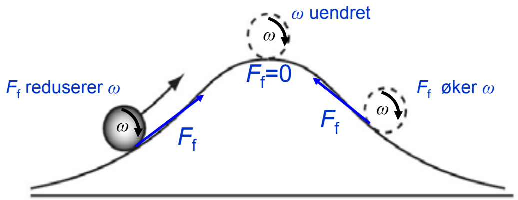
$\frac{1}{2}\, m\, v^2 \quad + \quad \frac{1}{2}\, I\omega^2 \quad = \frac{1}{2}\, m\, v^2\, (1+c)$

Treghetsmoment ulike skapninger:



Oppgave

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



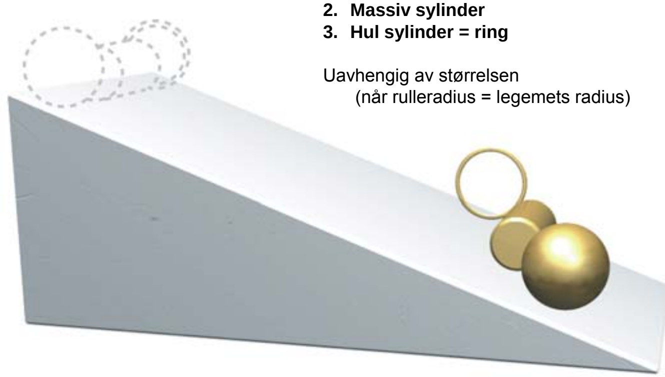
Ytre kraft (mg sinα) endrer v
F_f gir moment til rotasjonen

Hvilken ruller fortest:
Massiv kule
massiv sylinder, eller
hul sylinder ?

Den med minst c
i tregh.momentet $I = c\, mr^2$

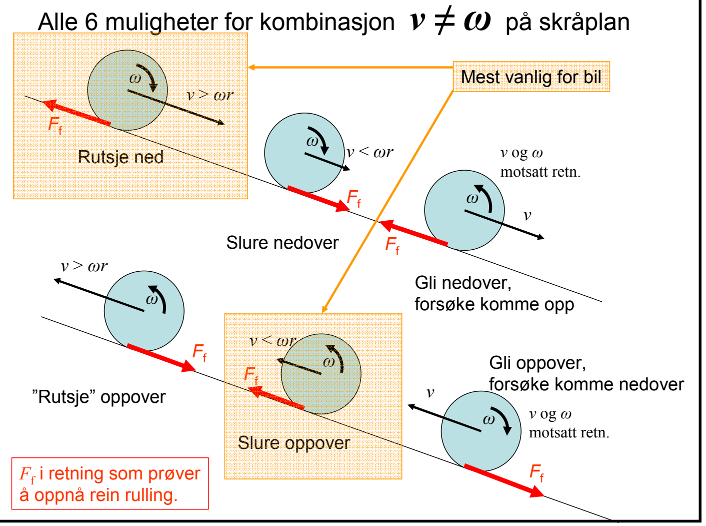
1. **Kule**
2. **Massiv sylinder**
3. **Hul sylinder = ring**

Uavhengig av størrelsen
(når rulleradius = legemets radius)

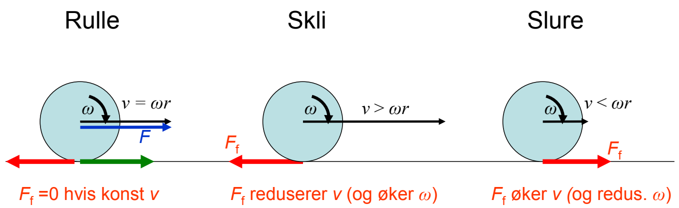


Rått egg - kokt egg.
Hvilket ruller fortest?

- http://fy.chalmers.se/~perolof/fyslek/
- (Leksaker | Mekanik | Äggkapplöpning)



Rulle / skli / slure på flatt underlag



v **øker** => F_f mot venstre for å øke ω

v **minker** => F_f mot høyre for å redusere ω

Hvis ytre kraft F årsak til endring i v

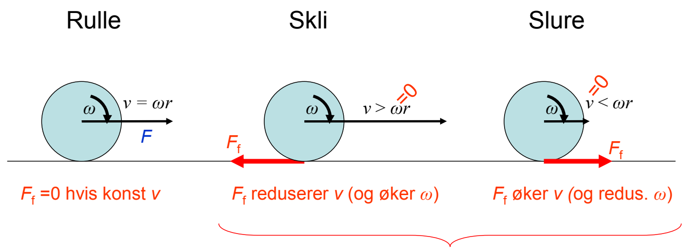
ω **øker** => F_f mot høyre får å øke v (akselererer)

ω **minker** => F_f mot venstre for å minke v (bremser)

Hvis bilmotor/hjulrotasjon årsak til endring i v

(mer avansert)

Rulle / skli / slure på flatt underlag



Retning for F_f:

1. Sett minste verdi lik null.

2. F_f i retning som prøver å oppnå rein rulling.

Oppsummering: Rulling

- Rein rulling:
- $v = \omega r$; $a = \alpha r$
  (dvs. translasjonshastighet = banefart til periferien)
- $E_k = ½\, mv^2 + ½\, I\omega^2 = ½\, m\, v^2\, (1+c)$
  - med $I = c\, mr^2$ og $\omega = v/r$
- Statisk friksjon $F_f \leq \mu_s F_N$ gir vinkelakselerasjon: $F_f\, r = I\alpha$.
- Ved rein rulling ser vi bort fra energitap (ingen rullemotstand).

- Spinne/skli/rutsje:
- $v \neq \omega\, r$. Kinematisk friksjon $F_f = \mu_k F_N$ i retning som prøver å oppnå rein rulling.
- Kinematisk friksjon gjør et friksjonsarbeid som endrer kinetisk energi

Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- (N2-rot) stive legemer: $\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- (N2-rot) alle legemer: $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $L = I\, \omega$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

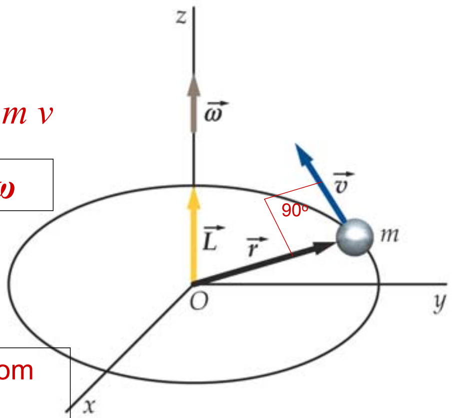
Spinn
(angular momentum)
Ch. 10.5

Spinn ved rotasjon

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r}$ => $|\boldsymbol{L}| = r\, m\, v$

$$\boxed{L = mr^2\, \omega = I\, \omega}$$

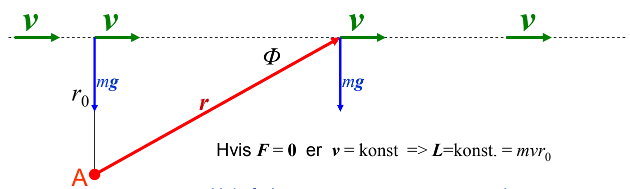


Stivt legeme, rot. om symmetriakse:
$L = \Sigma m_i r_i^2\, \omega = I\, \omega$

Spinn ved translasjon

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$$

$$|\boldsymbol{L}| = r\, m\, v \sin \Phi = r_0\, mv$$



Hvis $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ er $\boldsymbol{v} = \text{konst}$ => $\boldsymbol{L}$=konst. $= mvr_0$

Hvis f.eks. $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ er $\tau \neq \mathbf{0}$ => $\boldsymbol{L}$ endres

$\boldsymbol{L}$ avhengig av valgt origo A (r_0 og $\boldsymbol{r}$ avhengig av A)