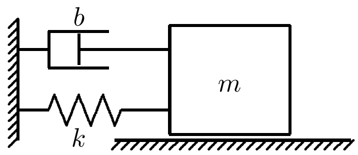
TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)
Øving 4

Veiledning: Mandag 24. sep. kl 17:15-19.
Innlevering: Onsdag 26. sep. kl. 12:00

Et læringsmål er at numerisk fysikk skal bli en integrert del av fysikkundervisningen på alle nivåer. Oppgave 1d er basert på å kjøre en oppgitt numerisk programkode. Scriptet er oppgitt i Matlab (Octave), men du kan gjerne bruke Python hvis du tilpasser koden selv.

Oppgave 1. Dempet svingning

a. På grunnlag av figuren til høyre, vis hvordan man kommer fram til likningen for dempede svingninger:



$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

og finn γ og ω_0 uttrykt med m, b og k.

b. Hva betyr det at et system er over-, under- eller kritisk dempet?

c. Vis at $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi)$ er en løsning av svingelikningen (1) ved å sette inn, og finn dermed uttrykk for ω_d.

d. Vi løser nå differensialligningen (1) numerisk ved bruk av *Verlet-integrasjon*. Denne metoden består ganske enkelt i å bytte ut $\ddot{x}$ og $\dot{x}$ med endelig-differansuttrykkene[1]

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \frac{x(t_{n+1}) - x(t_{n-1})}{2\Delta t} \tag{2}$$

$$\ddot{x} \quad \rightarrow \quad \frac{x(t_{n+1}) - 2x(t_n) + x(t_{n-1})}{\Delta t^2}\,. \tag{3}$$

Her er $t_n = t_0 + n\Delta t$ hvor Δt er tidssteget og t_0 starttiden. $\Delta t^2 = (\Delta t)^2$. Bytter vi i differensialligningen (1) $\dot{x}$ og $\ddot{x}$ ut med uttrykkene (2) og (3) og løser med hensyn på $x(t_{n+1})$, finner vi

$$x(t_{n+1}) = \frac{2 - \omega_0^2\Delta t^2}{1 + \gamma\Delta t}\; x(t_n) - \frac{1 - \gamma\Delta t}{1 + \gamma\Delta t}\; x(t_{n-1}). \tag{4}$$

Iterasjonen bestemmer altså den neste x-verdien $x(t_{n+1})$ på grunnlag av de to foregående. For å starte denne iterasjonen må vi vite $x(t_0)$ og $x(t_1)$. Hvorfor må vi vite to verdier for å komme i gang?

Matlab-scriptet `tfy4115_Ov4_1.m` som du kan lesse ned fra øvinggsiden på nett, implementerer Verlet-algoritmen over. Startverdier er gitt øverst i scriptet, og disse kan du endre på og kjøre programmet gjentagne ganger og for hver gang studere resultatet i figuren.

Kjør scriptet for forskjellige tidssteg Δt og sammenlign med den analytiske løsningen som også er kodet inn og framkommer som rødt i grafen. Sjekk nøyaktigheten ved valg av ulike (ekstreme) verdier av Δt. Velg også andre verdier for inputverdiene γ og ω_0 og sjekk slik også overdempet og kritisk dempet løsning med den analytiske løsningen. Print ut minst én graf, noter på verdier for inputverdier og lever inn sammen med resten av øvingen.

e. En pendel består av en aluminiumkule festet i en 1,00 m lang tråd. Målinger gir at i løpet av 4,0 minutter vil amplituden minke fra $6,00°$ til $5,40°$.

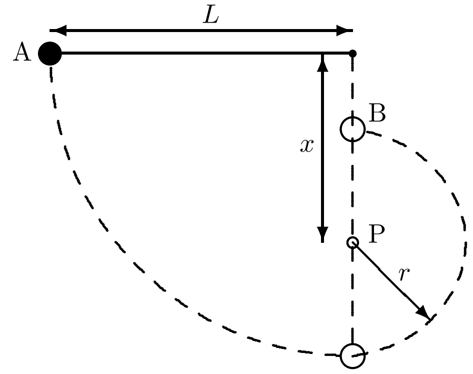
i) Bestem koeffisienten γ i likningen for underkritisk demping. (Vi regner her med konstant vinkelfrekvens.)

ii) Bestem perioden T_d for den dempede svingningen. Har dempningen noen praktisk betydning for pendelens periode?

[1] I uttrykket for $\dot{x}$ er det to tidssteg mellom $x(t_{n+1})$ og $x(t_{n-1})$, derfor $2\,\Delta t$ i nevneren. Siste uttrykk framkommer f.eks. fra

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{x}(t_{n+\frac{1}{2}}) - \dot{x}(t_{n-\frac{1}{2}})}{\Delta t} = \frac{\frac{x(t_{n+1})-x(t_n)}{\Delta t} - \frac{x(t_n)-x(t_{n-1})}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{x(t_{n+1}) - 2x(t_n) + x(t_{n-1})}{\Delta t^2}\,.$$

Oppgave 2. Én pendel med to ulike lengder



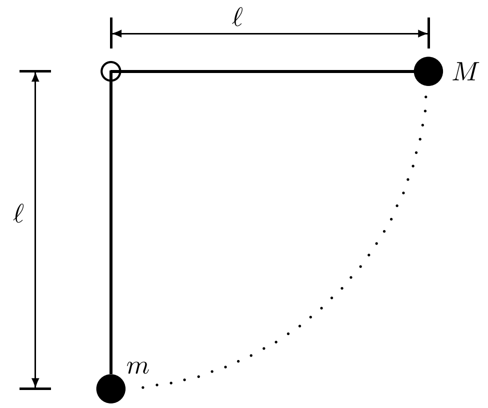
En pendel består av ei kule med masse m i ei snor med lengde L, som vist i figuren. Pendelen trekkes ut til snora er vannrett i posisjon A, og slippes. Snora treffer en pinne P i avstand x rett under pendelens opphengingspunkt. Herfra svinger pendelen rundt denne pinnen slik at pendellengden blir kortere.

a. Bruk energibetraktning til å vise at farten til kula når den er rett over pinnen i posisjon B, blir:

$$v = \sqrt{2g(2x - L)}$$

b. Hvor stor må x være ift. L for at kula skal nå fram til posisjon B (dvs. med stram snor)?

Oppgave 3. Elastisk støt



To stålkuler, med masser M og m, er hengt opp i samme punkt med tynne snorer, begge med lengde ℓ. Kula med masse M trekkes ut til snora er horisontal (og strukket), og slippes så. Den svinger nedover, treffer kula med masse m ("sentralt støt") – og kulene spretter fra hverandre igjen. Anta fullstendig elastisk støt og vektløse snorer. Betrakt kulene som punktmasser. Tyngdens akselerasjon er g.

Vi bruker V og S for hastighet og snordrag knyttet til masse M; samt v og s for hastighet og snordrag knyttet til masse m. Umerket før støtet og merket ($'$) etter støtet.

a. Finn uttrykk for hastighten V til kula med masse M og strekket S i snora som masse M henger i, *like før støtet.*

b. Finn så uttrykk for hastigheten V' til kula med masse M og hastigheten v' til kula med masse m *like etter støtet.* Sjekk om grensene $M \ll m$ og $M \gg m$ gir det du forventer.

c. Finn dernest uttrykk for snorkreftene S' og s' like etter støtet.

d. Sett tilslutt inn $M = 10,0\,\mathrm{g}$, $m = 20,0\,\mathrm{g}$, $\ell = 1,00\,\mathrm{m}$ og $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$, og finn V, V', v', S, S' og s' numerisk. Kontroller at uttrykkene dine gir riktige dimensjoner.

Oppgave 4. Relativ bevegelse på flåte.

En flåte er i ro på et "blikk-stille" vann, uten strøm. En mann står i ene ytterkant av flåten og går rolig til den andre enden. Flåten er $L = 10{,}0$ m lang og veier $M = 300$ kg. Mannen veier $m = 100$ kg. Hvor langt flytter flåten seg? Se bort fra friksjon i vannet.
Tips: Bevaring bevegelsesmengde ift. koordinatsystem i ro. Anta konstant fart under hele bevegelsen.

Utvalgte fasitsvar:
1e) $4,4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$, $\quad 2,01$ s. $\quad$ 2b) $x > \frac{3}{5}L$. $\quad$ 3d) $V' = -1,48\,\mathrm{m/s}$, $s' = 0,37\,\mathrm{N}$. $\quad$ 4) 2,50 m.