TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)
Øving 5

Veiledning: Mandag 1. okt. kl 17:15-19.
Innlevering: Onsdag 3. okt. kl. 12:00

Oppgave 1. Svingetid som funksjon av amplituden

Pendelbaserte stueur må svinge med konstant amplitude for å gå riktig. Eller, hvor viktig er egentlig dette? For å svare må vi finne den analytiske løsningen av svingelikningen (1) og sammenlikne med den lineariserte likn. (2). Likn. (1) gir at svingetida er avhengig av amplituden θ_0, men hvor mye? Istedenfor å kaste oss ut i det vanskelige arbeidet å løse likning (1) analytisk, velger vi en numerisk løsning. Matlab-koden er oppgitt.

Likningen for en tyngdependel med dempning er som følger:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{1}$$

med $\omega_0^2 = g/\ell$ der ℓ er pendelens lengde. Hvis vi lineariserer $\sin\theta \approx \theta$ for små vinkler, får vi en standard dempet svingelikning

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0. \tag{2}$$

Den lineariserte likning har en kjent analytisk løsning $\theta(t) = \theta_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi)$ der $\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ og fasevinkelen ϕ i dette tilfellet er uinteressant.

For en numerisk løsning av likningene (1) og (2) bruker vi Verlet-integrasjon som i forrige øving:

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \frac{\theta(t_{n+1}) - \theta(t_{n-1})}{2\Delta t} \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{\theta(t_{n+1}) - 2\theta(t_n) + \theta(t_{n-1})}{\Delta t^2}\,. \tag{4}$$

Innsatt i i likn. (1) og (2) og løst med hensyn på $\theta(t_{n+1})$, finner vi:

$$\text{Lineær likn. (2)} \quad \Rightarrow \quad \theta_\mathrm{lin}(t_{n+1}) = \frac{2 - \omega_0^2\Delta t^2}{1 + \gamma\Delta t}\,\theta(t_n) - \frac{1 - \gamma\Delta t}{1 + \gamma\Delta t}\,\theta(t_{n-1}) \tag{5}$$

$$\text{Ulineær likn. (1)} \quad \Rightarrow \quad \theta(t_{n+1}) = \frac{2}{1 + \gamma\Delta t}\,\theta(t_n) - \frac{1 - \gamma\Delta t}{1 + \gamma\Delta t}\,\theta(t_{n-1}) - \frac{\omega_0^2\Delta t^2}{1 + \gamma\Delta t}\,\sin\theta(t_n). \tag{6}$$

Den lineære likningen (5) er lik uttrykket $x(t_{n+1})$ i forrige øving.

a. Matlab-scriptet `tfy4115_Ov5_1.m` som du kan lesse ned fra øvinggsiden på nett, implementerer Verlet-algoritmene over. Bruk programmet til å sammenligne løsninger av den ikke-lineære pendelligningen (6) med løsninger av den lineariserte ligningen (5). Startverdier er gitt øverst i scriptet og programmet gir kurver og utskrift av svingetida T til skjermen. Velg ulike amplitudeverdier (angitt i grader) og kjør programmet gjentagne ganger.

b. Er det ok å linearisere når amplituden $\theta_0 = 5°$? Svar på dette med å beregne hvor mye klokka sinker i et døgn dersom den er kalibrert til å gå med svært liten amplitude (f.eks. 1°), men svinger med 5°?

c. Analytisk løsning av likn. (1) gir følgende uttrykk for perioden ved rekkeutvikling:

$$T(\theta_0) \;=\; T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right], \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Sammenlikn resultater fra Matlab-scriptet med dette uttrykket f.eks. for $\theta_0 = 5°$ og $\theta_0 = 15°$.

d. Har du lyst kan du utfordre Matlab-programmet ved å simulere for θ_0 lik eller nærme 180°. Du må nok da øke tidsintervallet vi integrerer over. Her er kun den ikke-linære løsningen interessant, og den forutsetter en "stiv" snor for å avbilde virkeligheten. Kommentarer?

Oppgave 2. Bevegelsesmengde og ishockey

En ishockeypuck med hastighet $v_1 = 40\,\mathrm{m/s}$ treffer en annen ishockeypuck som ligger i ro på isen (med neglisjerbar friksjon). De to puckene har samme masse. Etter støtet observerer vi at den ene pucken beveger seg ut fra kollisjonspunktet i en vinkel $\alpha = 30°$ og den andre i en vinkel $\beta = 45°$ i forhold til retningen den innkommende pucken beveget seg i før støtet.

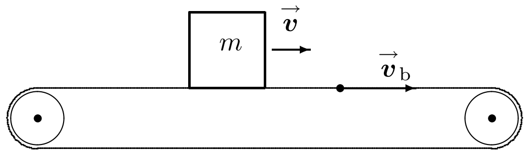
a. Tegn figur!

b. Hvor stor er farten til hver av de to puckene like etter støtet?

c. Hvor stor brøkdel av den kinetiske energien går tapt i støtet?

Oppgave 3. Friksjon, bevegelsesmengde og energi på transportband

En kartong med masse m slippes loddrett ned på et transportband som beveger seg med konstant hastighet $\vec{v}_\mathrm{b}$, se figur. Kartongen får etterhvert samme hastighet som bandet. Den kinematiske friksjonskoeffisienten er μ_k.



a. Hvor stort arbeid utfører friksjonskrafta?

b. Hvor langt transporteres kartongen i forhold til bakken før den får samme hastighet som bandet?

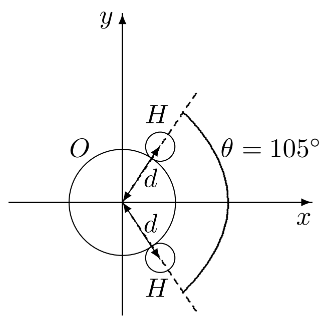
c. Hvor lang tid tar det for kartongen å oppnå samme hastighet som transportbandet?

d. Hvor langt har bandet beveget seg på denne tida?

e. Hvor mye energi må transportbandet tilføres? (Se bort fra friksjon i bandets drivhjul).

Oppgave 4. Massefellespunkt.

Figuren viser en enkel modell av et vannmolekyl. Vi kan betrakte atomene som punktmasser fordi omtrent hele atomets masser er knyttet til atomkjernen, som utgjør ca. 10^{-5} av atomets utstrekning. Oksygenatomets masse er $16\,\mathrm{u}$ og hydrogenatomets masse er $1\,\mathrm{u}$. Finn posisjonen til vannmolekylets massefellespunkt uttrykt ved avstanden d mellom oksygenkjernen og hydrogenkjernene.



Oppgave 5. Rakettlikningen

En rakett befinner seg ute i verdensrommet et sted, tilstrekkelig langt unna himmellegemer til at gravitasjonskreftene på raketten kan neglisjeres. Kapteinen er fornøyd med retningen, men synes rakettens hastighet er i minste laget. Han lar derfor motoren brenne i 50,0 s. Rakettens masse er $2,55 \cdot 10^5$ kg, hvorav $1,81 \cdot 10^5$ kg er brennstoff. Motoren forbruker 480 kg brennstoff pr. sekund, og relativhastigheten til den utbrente gassen er 3,27 km/s.

a. Hvor stor er rakettens skyvkraft?

b. Hvor stor er rakettens masse etter forbrenningen?

c. Hvilken hastighetsøkning er oppnådd etter de 50 sekundene?

Utvalgte fasitsvar:
2c: 20 %; 3d: $2x_\mathrm{k}$, 3e: mv_b^2; 4: $x_\mathrm{cm} = 0,068\,d$, $y_\mathrm{cm} = 0$; 5a: 1,57 MN; 5b: $2,31 \cdot 10^5$ kg; 5c: $323\,\mathrm{m/s}$;