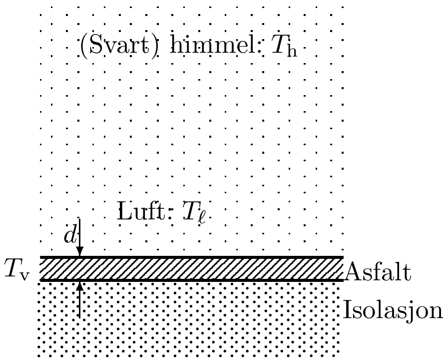
TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)
Øving 13

Veiledning: Mandag 26. nov. kl 17:15-19.
Innlevering: Onsdag 28. nov. kl. 12:00

Oppgave 1. Utstråling fra vegbane.

I arbeidet med å eliminere teleproblemene på norske veger, har Vegvesenet gjort systematiske forsøk med forskjellige materialtyper og -kombinasjoner i veiene. I et ikke helt vellykket forsøk, ble følgende utprøvd: Under et *tynt* lag med asfalt ble det plassert et lag med høyverdig isolasjon (se figuren). Problemet med denne modellen var at den førte til mye ising i veibanen senhøstes. Denne regneoppgaven er ment å kaste lys over problemet.



a. En horisontal veibane med temperatur T_{v} og emisjonskoeffisient e utveksler en klar høstkveld stråling med himmelen. Klar himmel (atmosfæren) er kjent å stråle som et absolutt svart legeme med temperatur T_{h}. Lufta nær bakken har temperatur T_ℓ. Overgangstallet mellom vei og luft under de rådende forhold er α. Skriv ned uttrykket for energistrømtettheten opp fra og ned mot veibanen som skyldes

1. stråling fra himmelen
2. refleksjon av himmelstråling fra veibanen
3. utstråling fra veibanen
4. varmeovergang mellom luft og veibane.

På grunn av isolasjonslaget kan vi se bort fra jordvarmestrømmen opp mot veibanen. Vis at ved stasjonære forhold er veibanens temperatur bestemt av likningen

$$e\sigma(T_{\mathrm{h}}^4 - T_{\mathrm{v}}^4) + \alpha(T_\ell - T_{\mathrm{v}}) = 0, \tag{1}$$

der σ er Stefan-Boltzmanns konstant.

b. Himmelens strålingstemperatur er nær $T_{\mathrm{h}} = -13\,°\mathrm{C} = 260$ K, mens vegbanen har temp. i området $T_{\mathrm{v}} \sim 0\,°\mathrm{C}$, slik at $T_{\mathrm{h}}^4 - T_{\mathrm{v}}^4 < 0$. Fjerdegradslikninger er vanskelig å løse, men da $T_{\mathrm{v}} - T_{\mathrm{h}} << T_{\mathrm{h}}$, kan vi linearisere $T_{\mathrm{v}}^4 - T_{\mathrm{h}}^4$ ved å bruke den deriverte av T^4 som stigningstall:

$$T_{\mathrm{v}}^4 - T_{\mathrm{h}}^4 \;\approx\; 4(T_{\mathrm{h}} + \Delta T)^3 (T_{\mathrm{v}} - T_{\mathrm{h}}),$$

der vi tar stigningstallet midt mellom T_{h} og T_{v} og derfor $\Delta T = \frac{1}{2}(T_{\mathrm{v}} - T_{\mathrm{h}})$ settes lik 5 K. Bruk denne tilnærmelsen i likn. (1), samt følgende verdier: $T_\ell = +2,0\,°\mathrm{C} = 275$ K, $e = 0,80$ og $\alpha = 6,0\,\mathrm{W/(m^2K)}$, og finn T_{v} under stasjonære forhold.

c. Eksperimentelt er vanndampens metningstrykk over is og vann:

$t/°\mathrm{C}$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
p/mmHg	3,28	3,57	3,88	4,22	4,58	4,93	5,29

Luftas relative fuktighet ϕ er forholdet mellom det aktuelle partialtrykket for vanndamp og metningstrykket til vanndamp ved den gitte temperatur: $\phi = \dfrac{p_{H_20}}{p_{\mathrm{metning}}}$. For hvilke verdier av relativ fuktighet ϕ må en forvente ising i veibanen under temperaturer som gitt i pkt. **b.**?

d. Ekstraoppgave: Før solnedgang holdt innstråling fra sola veibanen på en høyere temperatur. Vi skal nå gjøre et overslag over hvor raskt veibanens temperatur synker mot sin stasjonære verdi (funnet i pkt. **b.**) når sola er gått ned. Anta at varmeledningsevnen i asfalten er såpass stor, og asfaltlaget såpass tynt, at vi som en rimelig tilnærmelse kan regne som om hele asfaltlaget, med tykkelse d, har samme, tidsavhengige temperatur $T_{\mathrm{v}}(t)$. La u være asfaltens indre energi per volumenhet. Endringen i u per tidsenhet kan da skrives som

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T_{\mathrm{v}}} \cdot \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = c\rho \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t}.$$

Hva står c og ρ for her? Bruk dette og energibevarelse til å vise at $T_{\mathrm{v}}(t)$ oppfyller en differensiallikning av formen

$$\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\left[T_{\mathrm{v}}(t) - T_{\mathrm{v}}(\infty)\right],$$

når de samme tilnærmelsene brukes som under pkt. **b.**, og $T_{\mathrm{v}}(\infty)$ er den stasjonære verdien for temperaturen funnet der. Uttrykk tidskonstanten τ ved kjente størrelser og bestem den numerisk når $d = 7,0$ cm, $c = 200\,\mathrm{J/(kg\cdot K)}$ og $\rho = 2,4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

Oppgave 2. Hvor stor er Betelgeuse?

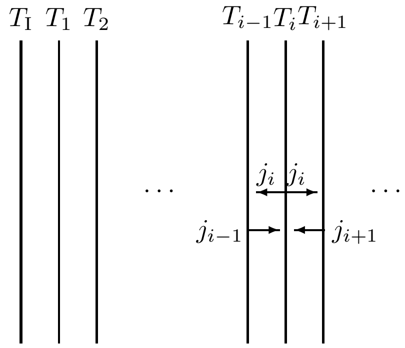
Stjerner emitterer lys nesten som ideelle svarte legemer, dvs. etter Stefan-Boltzmanns lov. Betelgeuse – den røde kjempestjerna i skulderen på stjernebildet Orion – har en overflatetemperatur på 3000 K og en total utstråling $P = \dot{Q} = 3,9 \cdot 10^{30}$ W.

Hva er radien R til kjempestjerna? Oppgi svaret både i enheter km og i solradier $R_\odot = 6,96 \cdot 10^8$ m.

Oppgave 3. Veggisolasjon.

I denne oppgaven skal vi finne hvordan isolasjonsmaterialer slik som steinull virker. Hvordan kan det ha seg at å fylle hulrommet mellom ytter- og innervegger med steinull reduserer varmestrømmen mellom veggene? Det er to effekter til stede. Den første består i at steinullen stopper konveksjonsstrømmene mellom veggene. Den andre effekten gjelder varmestrålingen mellom veggene. Det er denne effekten vi skal studere her.

Vi kan modellere steinulla som et stort antall plater mellom den varme og den kalde veggen. Vi ser på éndimensjonal modell. Mellom innerveggen som har temperaturen T_I og ytterveggen som har temperaturen T_Y er det plassert n plater. Vi skal regne ut temperaturen til hver plate T_i, hvor i går fra 1 til n og telles fra innerveggen.



a. Hvorfor har vi ikke oppgitt avstanden mellom platene i problembeskrivelsen over? Hva om de ikke står jevnt bortover?

Stefan-Boltzmann-loven gir at varmestrømtettheten j_i (i W/m^2) fra **hver side** av plate i, som funksjon av platetemperaturen T_i, er

$$j_i = e\sigma T_i^4, \tag{2}$$

der e er emissiviteten og σ er Stefan-Boltzmann-konstanten. I denne oppgaven antar vi et $e = 1$ for alle platene. Vi antar med andre ord at platene er svarte legemer.

Når stasjonær tilstand har inntrådt (det vil si temperaturene T_i ikke endrer seg i tid), vil platene motta like mye stråling fra sine naboer som de selv sender ut. Da kan vi sette opp varmestrømbalanseligninger for hver plate (se figuren). For plate 1 får vi

$$-2T_1^4 + T_2^4 = -T_\mathrm{I}^4\ , \tag{3}$$

for platene 2 til $n-1$ får vi

$$T_{i-1}^4 - 2T_i^4 + T_{i+1}^4 = 0\ , \tag{4}$$

og for plate n får vi

$$T_{n-1}^4 - 2T_n^4 = -T_\mathrm{Y}^4\ . \tag{5}$$

b. Foreta et variabelskifte og døp om T_i^4 til x_i for hver plate i ligningene (3), (4) og (5). Formulér så disse ligningene som et matriseproblem på formen

$$\overset{\Rightarrow}{\boldsymbol{S}}\,\vec{x} = \vec{b}, \tag{6}$$

hvor $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Hvordan ser $n \times n$-matrisen $\overset{\Rightarrow}{\boldsymbol{S}}$ ut og hva er konstantvektoren $\vec{b}$?

c. I Matlab-skriptet `tfy4115_Ov13.m` løser vi ligning (6) for $\vec{x}$. Kjør skriptet for ulike temperaturkombinasjoner av T_I og T_Y. Skriptet plotter varmestrømtettheten j gjennom veggene mot antall plater, n, i veggen. Den er regnet ut som

$$j = e\sigma(T_n^4 - T_\mathrm{Y}^4). \tag{7}$$

Forklar hvorfor dette er den totale varmegjennomstrømtettheten gjennom hele veggen.

d. Anta, for bestemte verdier av T_I og T_Y og store verdier av n, at varmestrømtettheten som funksjon av antall plater i veggen er $j(n) = Cn^N$ der C og N er konstanter. På grunnlag av plottet fra Matlabskriptet, beregn en omtrentlig verdi for N. Hva er den fysiske tolknigen av dette?

(forts. - flervalgsoppgaver)

Oppgave 4. Flervalgsoppgaver.

a. Med grunnlag i kinetisk teori for gasser: Når absolutt temperatur dobles, vil den midlere kinetiske energien til gassmolekylene endres med en faktor

A) 4
B) 2
C) $\sqrt{2}$
D) $1/\sqrt{2}$
E) $1/2$

b. Trykket i et system med luftmolekyler ved $20\,^{\circ}\mathrm{C}$ blir halvert i en adiabatisk prosess. Hvis adiabatkonstanten for luft er lik 1,41, finn sluttvolumet til gassen:

A) 2,66 ganger opprinnelig volum
B) 2,00 ganger opprinnelig volum
C) 1,64 ganger opprinnelig volum
D) 0,50 ganger opprinnelig volum
E) 0,38 ganger opprinnelig volum

c. Hvis α er den lineære varmeutvidelseskoeffisienten til et materiale ved $0\,^{\circ}\mathrm{C}$, så er volumutvidelseskoeffisienten til materialet ved $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ lik

A) α
B) 3α
C) α^3
D) $\alpha^{1/3}$
E) Ingen av svarene over er rett

d. Hvis temperaturen (i kelvin) på den varme siden av en vegg blir doblet, vil varmestrømmen gjennom veggen

A) dobles
B) øke med en faktor 4
C) avta med en faktor 4
D) halveres
E) øke, men kan ikke bestemme hvor mye

.... og dette var siste øving. Lykke til med eksamensforberedelser og eksamen!

Utvalgte fasitsvar:
1b) $-3.6\,^{\circ}\mathrm{C}$; 1c) 64 %; 1d) 1 time. 2) $R = 374\,R_{\odot}$; 3d) $N \approx -1$;