

# Eksempel: Skli og rulle bowlingkule.

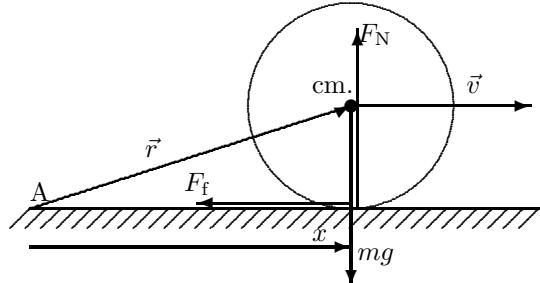
Vi antar ei bowlingkule "settes" på golvet med translasjonsfart  $v_0$ , dvs. uten rotasjon og uten at den dumper/hopper. Den vil først skli (rutsje), men friksjonen vil etterhvert gi kula rein rulling. Skal løse følgende problem:

- Hva er  $v$  når den ruller?
- Finn akselerasjonen,  $a$ , når den sklir.
- Hvor langt,  $l$ , sklir den før den oppnår rein rulling?
- Finn vinkelakselerasjonen  $\alpha = \dot{\omega}$  når den sklir.
- Hvor lang tid tar det før den oppnår rein rulling?

I første omgang velger vi et fast punkt A på bakken som referansepunkt for spinn og kraftmoment. Talspinnet  $L$  er banespinn pluss egenspinn som beskrevet i "Notat om banespinn og egenspinn":

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} + I_0\vec{\omega}.$$

Med  $x = 0$  der kula treffer bakken og  $x = l$  der kula oppnår rein rulling, har vi, når kulas masse er  $m$  og kulas radius  $R$ :



$$L(x=0) = Rmv_0 + 0 \quad (1)$$

$$L(x=l) = Rmv + I_0\omega = Rmv + \frac{2}{5}mR^2v/R = \frac{7}{5}Rmv \quad (2)$$

idet rein rulling ved  $x = l$  gir  $\omega = v/R$ .

Kraftmoment om A er null:

$$\tau = mgx - F_Nx + 0$$

idet tyngden  $mg$  og normalkrafta har effektiv arm  $x$  og friksjonskrafta virker langs planet (arm || kraft) og derfor null moment. Med totalt null kraftmoment er spinnet bevart, og vi får:

$$Rmv_0 = \frac{7}{5}Rmv \Rightarrow v = \frac{5}{7}v_0. \quad (3)$$

**b)** Når kula sklir er eneste kraft horisontalt:  $F_f = \mu_k F_N = \mu_k mg$ , og N2  $ma = -F_f = -\mu_k mg$  gir

$$a = -\mu_k g.$$

**c)** Konstant  $a$ -likning gir bestemmelse av lengden  $l$  med  $v_0$  ved start og  $v$  ved slutt:

$$v^2 - v_0^2 = 2al \Rightarrow \left(\frac{5}{7}v_0\right)^2 - v_0^2 = -2\mu_k gl \Rightarrow l = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_k g}.$$

ALTERNATIVT kan vi bruke kulas massesenter (B = cm) som referansepunkt. Spinn og kraftmoment om B er

$$L_B = I_0\omega \quad \text{og} \quad \tau_B = F_f R. \quad (4)$$

(N2-rot)  $\dot{L}_B = \tau_B$  gir dermed

$$I_0\dot{\omega} = F_f R.$$

Herfra kan vi finne:

**d)** Vinkelakselerasjon  $\dot{\omega}$  under skliing:

$$\dot{\omega} = \frac{F_f R}{I_0} = \frac{\mu_k mg R}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{\mu_k g}{\frac{2}{5}R} = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{R} = -\frac{5}{2}a$$

Merk at selvfølgelig er  $\dot{\omega} \neq a/R$  (og motsatt fortegn!), mens altså ved rein rulling er  $\dot{\omega} = a/R$ .

**e)** Dersom vi skal finne  $\omega$  under skliing må vi bruke følgende konstant-akselerasjonslikning for  $\omega$ , med  $\omega_0 = 0$ :

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}t = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{R}t.$$

Herfra kan vi også finne hvor lang tid det tar før rein rulling ( $v = \omega R$ ) er oppnådd:

$$\frac{v}{R} \equiv \omega = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{R}t \Rightarrow t = \frac{2}{5}\frac{v}{R}\frac{R}{\mu_k g} = \frac{2}{5}\frac{\frac{5}{7}v_0}{\mu_k g} = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu_k g}.$$