

## Kap. 6. Arbeid og energi. Energibevaring.

- Arbeid =  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- Kinetisk energi  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$
- Effekt = arbeid/tid =  $P = dW/dt$
- Arbeid på legeme øker  $E_k$ :  $dW = dE_k$
- Potensiell energi  $E_p(x,y,z)$   
(Tyngdefelt:  $E_p = mgz$ ; Fjærpotensial:  $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ )
- Konservative krefter kan avledes fra pot.energi:  

$$\vec{F} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] E_p(x,y,z) = -\vec{\nabla} E_p(x,y,z)$$
 (Tyngdekraft:  $\mathbf{F} = -mg$ ; Fjærkraft:  $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ )  
 $dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$
- Arbeid av konservativ kraft reduserer tilhørende potensiell energi:  $dW = -dE_p$
- Energibevaring i konservativt felt:  
 $d(\frac{1}{2} m v^2 + E_p(x,y,z)) = 0$
- Energibevaring når friksjon:  
 $d(\frac{1}{2} m v^2 + E_p(x,y,z)) = dW_f = \text{friksjonsarbeid} < 0$

## Konstant-akselerasjonslikninger

Translasjon:  
(konstant akselerasjon  $a$ )

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

$$s - s_0 = \langle v \rangle t = \frac{1}{2}(v + v_0) t$$

Rotasjon om fast akse:  
(konstant vinkelakselerasjon  $\alpha$ )

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

$$\theta - \theta_0 = \langle \omega \rangle t = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0) t$$

## Kollisjoner

Vi har sett på:

- Når ingen ytre krefter (i bevegelsesretning):  
– Bevegelsesmengde (impuls) er bevart
- Når ingen ytre kraftmoment om akse A:  
– Spinn er bevart om akse A
- Elastisk støt:  
– Bevegelsesmengde bevart. Kinetisk energi bevart
- Uelastisk støt:  
– Bevegelsesmengde bevart. Kinetisk energi avtar (varme)

## Flervalgsoppgave

e. To masser,  $m$  og  $3m$ , ligger på et friksjonsfritt bord på hver sin side av en spent fjær. Når fjærlåsen åpnes, skyves de to massene i hver sin retning. Hvordan fordeles den potensielle energien i den spente fjæra på kinetisk energi til de to massene?

- A 25 % på  $m$ , 75 % på  $3m$
- B 75 % på  $m$ , 25 % på  $3m$
- C 10 % på  $m$ , 90 % på  $3m$
- D 90 % på  $m$ , 10 % på  $3m$
- E 50 % på  $m$ , 50 % på  $3m$



e. B. Bevaring av bevegelsesmengde gir forholdet mellom hastighetene til de to massene, og dermed forholdet mellom deres kinetiske energi:

$$0 = p_1 + p_3 = mv_1 + 3mv_3$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_3} = -3$$

$$\Rightarrow \frac{mv_1^2/2}{3mv_3^2/2} = 3$$

Følgelig 75% kinetisk energi på  $m$  og 25% på  $3m$ .

## Flervalgsoppgave

i. Tre jenter står på ytterkanten av en karusell som roterer med en vinkelhastighet  $\omega$  og rotasjonen er friksjonsfri. Under rotasjonen går jentene rolig inn mot sentrum av karusellen (se figuren). Under bevegelsen vil det totale spinn  $L$  om karusellens aksling og den totale kinetiske energi  $E$  til karusellen + jentene endre seg slik:

- A)  $L$  øker og  $E$  øker
- B)  $L$  øker og  $E$  uendra
- C)  $L$  uendra og  $E$  øker**
- D)  $L$  uendra og  $E$  uendra
- E)  $L$  uendra og  $E$  avtar

Spinn:  $L = I \omega$  **Konstant!**  
 Personer inn mot sentrum  $\rightarrow I = \sum m_i r_i^2$  avtar  
 $\rightarrow \omega$  må øke!

Kinetisk energi:  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} L \omega = \frac{1}{2} L^2 / I$   
 Personer inn mot sentrum  $\rightarrow I$  avtar,  $L$  konstant  
 $\rightarrow E_k$  øker!

## Flervalgsoppgave

b. En student tar fart og hopper på en karusell som dermed begynner å rotere (tilnærmet friksjonsfritt) omkring en aksling som står fast i bakken, og som passerer gjennom karusellens sentrum. For systemet karusell + student, hvilke(n) størrelse(r) endrer seg *ikke* fra før til etter studentens innhopp på karusellen? (Her er  $E$  systemets energi,  $p$  systemets bevegelsesmengde og  $L$  systemets spinn mhp. en akse gjennom karusellens sentrum.)

- A) Bare  $L$**
- B)  $L$  og  $E$
- C)  $L$  og  $p$
- D)  $L$ ,  $E$  og  $p$
- E) Bare  $p$

**b. A.** Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi  $E$  for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde  $p$  være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinnet  $L$  er bevart.

## Flervalgsoppgave

Hva er bevart?

På friksjonsfritt bord

- A)  $L$  og  $E$
- B)  $L$  og  $p$**
- C)  $L$ ,  $E$  og  $p$
- D) Bare  $L$
- E) Bare  $p$

Eksamen des 2012

Hva er bevart?

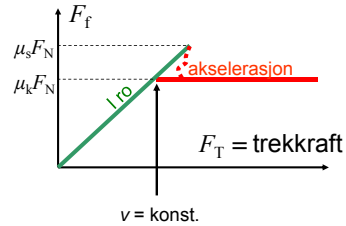
Aksling A

- A)  $L$  og  $E$
- B)  $L$  og  $p$
- C)  $L$ ,  $E$  og  $p$
- D) Bare  $L$**
- E) Bare  $p$

**Friksjon:**

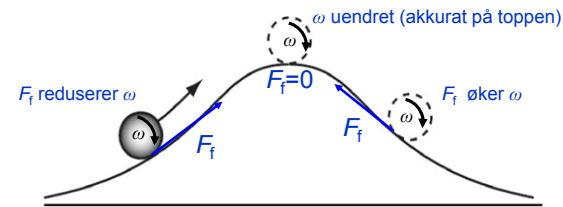
• Friksjon:

- Hvilefriksjon  $F_T = F_f \leq F_{f,max}$   
( $F_f$  "ukjent")  $F_{f,max} = \mu_s F_N$   
(statisk friksjon)
- Glidefriksjon:  $F_T \geq F_f = \mu_k F_N$   
(kinetisk friksjon)



**Oppgave**

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



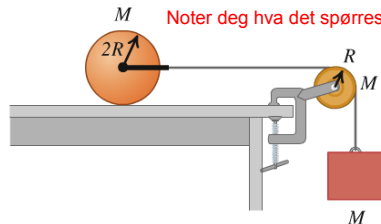
Tyngdekraft ( $mg \sin \alpha$ ) endrer  $v$   
 $F_f$  gir moment til rotasjonen

Y&F Opg. **10.87** • A uniform solid cylinder with mass  $M$  and radius  $2R$  rests on a horizontal tabletop. A string is attached by a yoke to a frictionless axle through the center of the cylinder so that the cylinder can rotate about the axle. The string runs over a disk-shaped pulley with mass  $M$  and radius  $R$  that is mounted on a frictionless axle through its center. A block of mass  $M$  is suspended from the free end of the string (Fig. P10.87). The string doesn't slip over the pulley surface, and the cylinder rolls without slipping on the tabletop. Find the magnitude of the acceleration of the block after the system is released from rest.

Figure **P10.87**

Les opplysninger/forutsetninger nøye.  
Tegn figur! - med krefter (kraftdiagram).

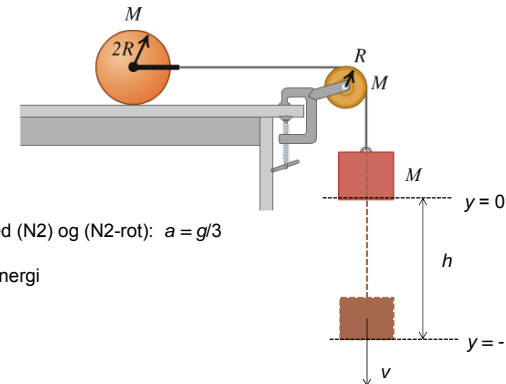
Noter deg hva det spørres etter!



Y&F, Fig. P10.87

Y&F Opg.

Figure **P10.87**



Vi fant med (N2) og (N2-rot):  $a = g/3$

Nå med energi

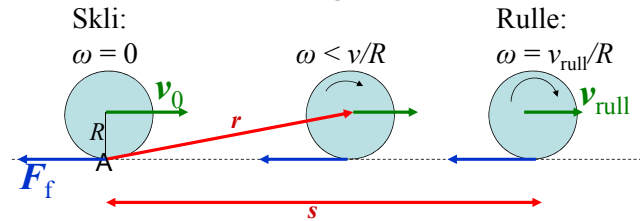
Eksamen TFY4115 des 2011, oppg. 2

Bedømmelse (snitt)	
2a	58 % (vekt 8)
2b	90 % (vekt 4)
2c	79 % (vekt 6)
2d	58 % (vekt 6)
2e	34 % (vekt 6)
Hele oppg. 2	62 % (vekt 30)
Totalt eksamen 2011	61 %

Liknende oppgave:

[Eksamen TFY4115 des 2008, oppg. 2](#)

**Bowlingkule** (liknende i Ø7, oppg. 1)



Om A:  $L_A = r \times m v + I_0 \omega$   
 Ingen krefter har moment  
 $\Rightarrow L_A = \text{konst.} = mrv_0$   
 $L_{\text{start}} = L_{\text{slutt}} \Rightarrow v_{\text{rull}} = v_0 \cdot 5/7$  (\*) -- uten å kjenne  $F_f$  !

**Kap. 4+5. Analogier translasjons- og rotasjonsbevegelser**

Størrelse	Trans	Rot (vektor)	Rot (skalar)
Stedkoord.	$\vec{r}$		$\theta$
Hastighet	$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$	$\dot{\vec{\theta}} = \vec{\omega}$	$\dot{\theta} = \omega$
Akselerasjon	$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$	$\ddot{\vec{\theta}} = \vec{\alpha}$	$\ddot{\theta} = \alpha$
“Kraft”	$\vec{F}$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\tau = rF \sin \theta$
“Masse”	$m$		$I = \int r^2 dm$
“Bev.mengde”	$\vec{p} = m \dot{\vec{r}}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I \dot{\vec{\theta}}$	$L = rps \sin \theta = I \omega$
Kin. energi	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$		$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
Arbeid	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$	$dW = \tau d\theta$
Effekt	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$	$P = \tau \omega$
Newton 2	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} = I \ddot{\vec{\theta}}$	$\tau = I \ddot{\theta}$
Newton 1	$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \text{konst}$	$\vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\omega} = \text{konst}$	

**0. Hovedsetning = Termisk likevekt:**

$$T_A = T_C \text{ og } T_B = T_C \rightarrow T_A = T_B$$



**1. Hovedsetning = Energibevarelse:**

$$\Delta U = Q - W$$

(endring indre energi) = (varme inn) – (arbeid utført)

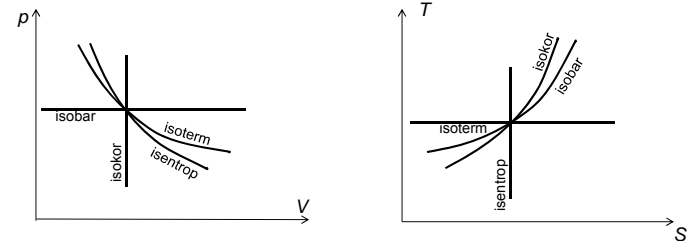
**2. Hovedsetning = Mulige prosesser:**

Varme kan ikke strømme fra kaldt til varmt legeme

### Termodynamiske kretsprosesser

- Reversible prosesser: Alltid likevekt
- Irreversible prosesser: Ikke likevekt.
- Varmekraftmaskiner
  - Virkningsgrad  $\eta = W/Q_H$ . Carnotmaskin  $\eta_C = 1 - T_L/T_H$
- Kjølemaskiner  $\eta_K = |Q_L / W|$
- Varmepumper  $\eta_V = |Q_H / W|$
- 2. hovedsetning: Det er umulig
  - at varme strømmer fra kaldt til varmt
  - å overføre varme 100% til arbeid
  - å senke entropien i et lukket system
- Entropi er en tilstandsfunksjon, def:  $\Delta S = \int dQ_{\text{rev}}/T$

### Prosesskurver i $pV$ - og i $TS$ -diagram for en gass:



isoterm:  $p \propto V^{-1}$   
 isentrop (adiabat):  $p \propto V^{-\gamma}$

isokor:  $T \propto \exp(S/nC_V)$   
 isobar:  $T \propto \exp(S/nC_p)$

$C_p > C_v \Rightarrow$  isobar slakere stigning

### Entropi

- Entropi er en tilstandsfunksjon, def:  $\Delta S = \int dQ_{\text{rev}}/T$
- $S$  øker når varme tilføres
- $S$  «produseres» ved irreversible prosesser
- $S$  øker for universet, følge av:
- 2. hovedsetning: Det er umulig
  - at varme strømmer fra kaldt til varmt
  - å overføre varme 100% til arbeid
  - å **senke entropien i et lukket system**

En eksamensoppgave varmetransport / entropi:

[Des 2009, oppg. 3](#)

Eksamensoppgave kretsprosesser:

[Eksamen TFY4115 des 2008, oppg. 1](#)

[Eksamen TFY4115 des 2011, oppg. 3](#)

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011 (de dårligst besvarte)

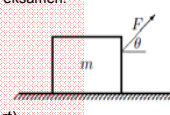
Totalt 8 oppgaver, tellende 20 %

opg.	a	b	c	d	e	f	g	h
%	32	97	43	76	49	77	73	60
Karakter	F	A	E	C	E	C	C	C

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011 (de dårligst besvarte)

a. En kloss med masse  $m$  blir trukket med konstant hastighet av en kraft i retning  $\theta$  med horisontalen, som vist på figuren. Den kinetiske friksjonskoeffisienten mellom den ru overflata og klossen er  $\mu_k$ . Størrelsen til friksjonskrafta kan uttrykkes

	Svar under eksamen:
A) $F \cos \theta$	39
B) $\mu_k F \cos \theta$	8
C) $\mu_k F \sin \theta$	11
D) $\mu_k (mg - F \sin \theta)$	63
E) To av svarene over er riktige	58
	1 (ubesvart)
	Snitt: 32 %



a. E. Ved gliding er  $F_f = \mu_k F_N = \mu_k (mg - F \sin \theta)$ . (Normalkrafta blir altså mindre som følge av at  $F$  har komponent oppover.) Fra  $\sum F_x = 0$  (farta konstant) får vi også  $F_f = F \cos \theta$ , slik at to alternativ er rette.

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011

c. For et stivt legeme faller tyngdepunktet og massesenteret sammen dersom

30	A) legemet er i rotasjonslikevekt	
4	B) legemet er i translasjonslikevekt	
24	C) legemet er både i rotasjonslikevekt og i translasjonslikevekt	
67	D) tyngdens akselerasjon er lik over hele legemet	
3	E) enhver kraft som kan akselerere legemet er konstant	
52 (ubesvart)		
Snitt: 43 %		

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011

e. To enatomige gasser, helium og neon, blir blanda i forholdet 2:1 og er i termisk likevekt ved temperaturen  $T$ . Molar masse til neon er 5x molar masse til helium. Hvis den midlere kinetiske energien per heliumatom er  $U$ , er den midlere kinetiske energien per neonatom lik

	80
A) $U$	4
B) $U/2$	9
C) $2U$	34
D) $5U$	13
E) $U/5$	40
	Snitt: 49 %

*Kinetisk gassteori*

$U = \langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$  **lik for begge**

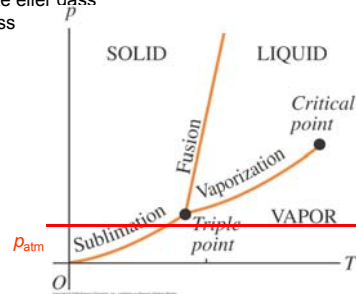
( minst  $m$  (helium) har høyest  $\langle v^2 \rangle$  )

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2011

h. Hvis lufttrykket er lavere enn trippelpunkt-trykket for et visst stoff, kan dette stoffet eksistere (avhengig av temperaturen)

- 16 A) som væske eller gass, men ikke faststoff
- 29 B) som væske eller faststoff, men ikke som gass
- 106 C) som faststoff eller gass, men ikke som væske
- 3 D) som faststoff, men ikke væske eller gass
- 14 E) som faststoff, væske eller gass
- 12 (ubesvart)

Snitt: 60 %



### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2012 (de dårligst besvarte)

Totalt 11 oppgaver, tellende 30 %

oppg.	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
%	88	23	90	35	61	46	41	34	39	63	23
karakter	B	F	A	F	C	E	E	F	E	C	F

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2012 (de dårligst besvarte)

b. To kuler er forbundet med ei masseløs snor og slippes i luft der tyngdens akselerasjon er  $g$ . Kulene har samme volum og har lik overflate slik at luftmotstanden er den samme (i newton) for begge, men den nederste har masse  $2m$  og den øverste  $m$ . Når hastigheten til kulene er konstant er snorkrafta

- Svar under eksamen:
- A) null 67
  - B)  $\frac{1}{2}mg$  37
  - C)  $mg$  33
  - D)  $\frac{3}{2}mg$  10
  - E)  $2mg$  13
  - 2 (ubesvart)

Snitt: 23 %



b. B. De to kulene som ett system:  $\sum F = 0 \Rightarrow 2F_t = 3mg \Rightarrow F_t = \frac{3}{2}mg$ .  
 Øvre kule som system:  $\sum F = 0 \Rightarrow mg + S = F_t \Rightarrow S = F_t - mg = \frac{3}{2}mg - mg = \frac{1}{2}mg$ .  
 Alternativt kan  $\sum F = 0$  for nedre kule brukes.

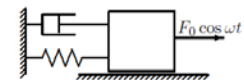
### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2012

d. En oscillator som består av en masse, ei fjær og et dempeledd påtvinges en harmonisk svingning med frekvens  $\omega$ . Resonansfrekvensen til den tvungne dempede oscillatoren er lik

- A) den påtrykte frekvensen  $\omega$
- B) frekvensen  $\omega_0$  til den dempede, fri oscillatoren
- C) frekvensen  $\omega_0$  til den udempede, fri oscillatoren
- D) alle over, fordi disse frekvensene er like
- E) ingen av A-D er rett svar.

- Svar under eksamen:
- A) 14
  - B) 40
  - C) 50
  - D) 8
  - E) 16
  - 34 (ubesvart)

Snitt: 35 %



d. C. Formelarket gir svaret ved formelen for  $x_0(\omega)$  = amplituden til en tvungen svingning, som viser maksverdi ved  $\omega = \omega_0$ .

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2012

g. Når en ideell gass ekspanderer isotermt fra volum  $V_1$  til et større volum  $V_2$ , gjør gassen et arbeid  $W_T$ . Dersom den samme gassen ekspanderer adiabatisk fra  $V_1$  til  $V_2$ , gjør gassen et arbeid  $W_{ad}$ . Hvilken påstand er rett?

- Svar under eksamen:
- A)  $W_{ad} = W_T$  A) 33  
 B)  $W_{ad} > W_T$  B) 19  
 C)  $W_{ad} < W_T$  C) 61  
 D) A, B eller C er rett avhengig av forholdet  $V_2/V_1$  D) 13  
 E) A, B eller C er rett avhengig av gassens temperatur E) 11

25 (ubesvart)

Snitt: 41 %

g. C Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi  $\Delta U = W < 0$ . Areal under  $pV$ -kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og  $V_2/V_1$ .

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2012

h. Vi tilfører 10 J varme til en idealgass ved konstant trykk. Da vil den indre energien

- Svar under eksamen:
- A) øke med 10 J A) 60  
 B) øke med mindre enn 10 J B) 50  
 C) øke med mer enn 10 J C) 4  
 D) forbli uendret D) 8  
 E) svaret vil være avhengig av om gassen er enatomig eller toatomig

E) 16

24 (ubesvart)

Snitt: 34 %

h. B Ved konst  $p$  utvider gassen seg og gjør ytre arbeid  $W > 0$ .  $U = Q - W$  gir at indre energi øker mindre enn 10 J.

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2012

i. Grafen viser temperaturen i en vegg i de ulike lag. Veggens består av tre ulike materialer med lik tykkelse men ulik varmeledningsevne. Anta at det er stasjonære forhold mht. varmeledning, hva kan du da si om de tre materialene?

- A) Materiale 1 er den beste varmeisulator.  
 B) Materiale 2 er den beste varmeisulator.  
 C) Materiale 3 er den beste varmeisulator.  
 D) Alle er like gode isolatorer.  
 E) Det er umulig å avgjøre hvilken

som er den beste isolator.

Svar under eksamen:

A) 0

B) 82

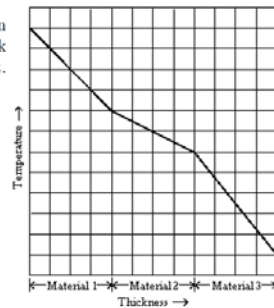
C) 61

D) 1

E) 5

13 (ubesvart)

Snitt: 39 %



i. C Samme varmestrom gjennom alle lag:  $j = \kappa_1 \cdot \Delta T_1 / \ell = \kappa_2 \cdot \Delta T_2 / \ell = \kappa_3 \cdot \Delta T_3 / \ell$ . Her er tykkelsen  $\ell$  lik for alle lag. Når  $\kappa$  er liten (god varmeisulator) er  $\Delta T$  stor.

### Flervalgsoppgaver fra Eks. 2012

k. Et legeme har temperatur  $227^\circ\text{C}$  og har netto varmeutstråling (utstråling minus innstråling) på  $P$  (J/s). Med hvilken faktor vil netto utstråling øke hvis legemets temperatur øker til  $427^\circ\text{C}$ ? Omgivelsene har konstant temperatur  $0^\circ\text{C}$ .

- A) 4,1 A) 32  
 B) 3,8 B) 50  
 C) 12,5 C) 51  
 D) 8,3 D) 1  
 E) 6,7 E) 1

27 (ubesvart)

Snitt: 23 %

k. A Netto utstråling:  $P = P_{ut} - P_{inn} = A \cdot e \cdot (\sigma T^4 - \sigma T_{omg}^4)$ . Areal og emissivitet  $e$  har ikke noe å bety for forholdet  $P_2/P_1 = (T_2^4 - T_{omg}^4)/(T_1^4 - T_{omg}^4) = \frac{700^4 - 273^4}{500^4 - 273^4} = 4,119$ . Temperaturer i kelvin.