TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)

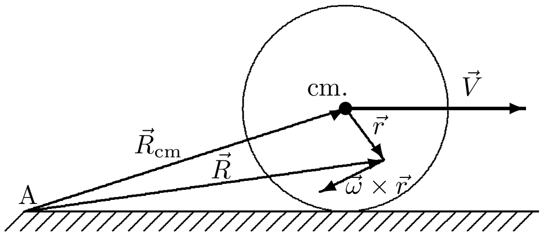
Notat om banespinn og egenspinn.

I flere øvingsoppgaver og bowlingkule-eksemplet i forelesning og repetisjon brukes følgende formel for totalspinn for et rullende legeme (rein rulling eller sluring):

$$\vec{L} = \vec{R}_{\mathrm{cm}} \times M\vec{V} + I_0\vec{\omega}$$

med
$\vec{R}_{\mathrm{cm}}$ = vektor fra aksen spinnet $\vec{L}$ beregnes om til massefellespunktet (cm.),
M = legemets masse,
$\vec{V}$ = cm-hastighet,
I_0 = legemets treghetsmoment om cm,
$\vec{\omega}$ = vinkelhastighet om cm.

Formelen og bruken av den er pensum, beviset som følger her er ikke pensum. Første ledd kan kalles banespinn (spinn pga. translasjon av cm) og andre ledd egenspinn (rotasjon om cm). Spesielt interessant at egenspinnet ikke er avhengig av hvilken akse A spinnet $\vec{L}$ beregnes om.



Posisjonsvektor for et masseelement dm i det rullende legemet benevnes $\vec{R} = \vec{R}_{\mathrm{cm}} + \vec{r}$, der $\vec{r}$ er radiusvektor fra masseelementets cm. Masseelementet har hastighet $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}$, der siste ledd er hastighet pga. rotasjonen. Dette gir (integrasjon over hele legemet)

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \int \vec{R} \times \mathrm{d}m\,\vec{v} \\
&= \int \left(\vec{R}_{\mathrm{cm}} + \vec{r}\right) \times \mathrm{d}m \left(\vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}\right) \\
&= \vec{R}_{\mathrm{cm}} \times \int \mathrm{d}m\,\vec{V} + \int \vec{R}_{\mathrm{cm}} \times \mathrm{d}m\,(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \int \vec{r} \times \mathrm{d}m\,\vec{V} + \int \vec{r} \times \mathrm{d}m\,(\vec{\omega}\times\vec{r}) \\
&= \vec{R}_{\mathrm{cm}} \times M\vec{V} + \vec{R}_{\mathrm{cm}} \times \vec{\omega} \times \left(\int \mathrm{d}m\,\vec{r}\right) + \left(\int \mathrm{d}m\,\vec{r}\right) \times \vec{V} + \int \mathrm{d}m\,\vec{r} \times (\vec{\omega}\times\vec{r})
\end{aligned}$$

De to $\left(\int \mathrm{d}m\,\vec{r}\right) = 0$ fordi $\vec{r}$ nettopp er avstandsvektor fra cm, slik at når vi summer og vekter over alle masser blir summen null. Dobbeltkryssproduktet i siste ledd kan vi f.eks. bruke Rottmanns $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$:

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}\,(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\,(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\,.$$

For ei tynn skive (todimensjonalt rullende legeme) er $\vec{r} \perp \vec{\omega}$ og dermed er sisteleddet null:

$$\vec{r}\,(\vec{r}\cdot\vec{\omega}) = \vec{r}\cdot 0 = 0$$

og vi får det vi skal bevise:

$$\vec{L} = \vec{R}_{\mathrm{cm}} \times M\vec{V} + \vec{\omega}\int \mathrm{d}m\,r^2 = \vec{R}_{\mathrm{cm}} \times M\vec{V} + I_0\vec{\omega}\,. \tag{1}$$

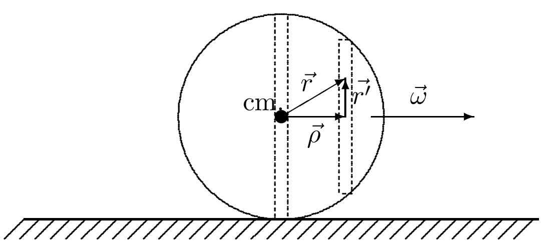
For et "breit" legeme må vi anta symmetri om aksen i fasong og massetetthet (f.eks. sylinder eller kule) og vi kan skrive om radiusvektor $\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{r}'$, der $\vec{\rho}$ er parallell eller antiparallel med $\vec{\omega}$ og $\vec{r}'$ er normal på $\vec{\omega}$. Da er $(\vec{r}\cdot\vec{\omega}) = |\vec{\rho}| = \rho$ og

$$\int \mathrm{d}m\,\vec{r}\,(\vec{r}\cdot\vec{\omega}) = \int \mathrm{d}m\,(\vec{\rho} + \vec{r}')\rho = \int \mathrm{d}m\,\vec{\rho}\,\rho + \int \mathrm{d}m\,\vec{r}'\,\rho.$$

Første ledd er null for et symmetrisk legeme, idet $\vec{\rho}\,\rho = \rho^2\hat{\rho}$ og vi ved integrasjonen får like mye positive som negative bidrag på hver side av cm. Siste ledd er også null som vi kan vise ved å dele opp integralet i tynne skiver hver ved posisjon $\vec{\rho}$, og integralet innenfor hver skive blir null pga. symmetri:

$$\int \mathrm{d}m\,\vec{r}'\,\rho = \int_\rho \rho \int_{\mathrm{skive}} \vec{r}'\mathrm{d}m = \int_\rho \rho \cdot 0 = 0.$$

Dermed får vi også likningen (1) for et "breit" legeme.



Sett i rulleretningen
($\vec{V}$ normalt opp av papirplan)
"Tynne" skiver vist stiplet

[Bevist også i Hauge og Støvneng kap 5.3 med litt annen notasjon.]

A.M. 26.9.14