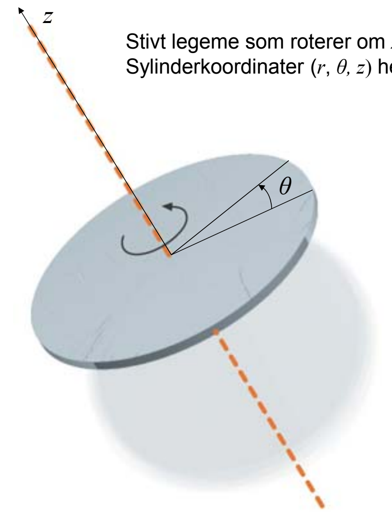
Kap. 9+10
Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:
- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rask rekap)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rask rekap)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Rulling
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (Newton 2 for rotasjon):

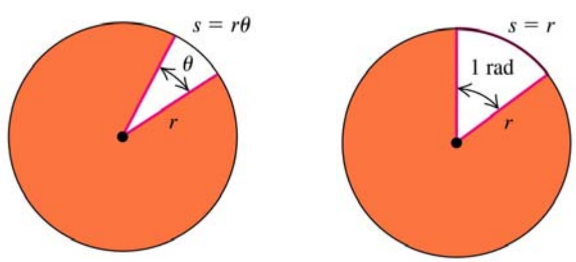
  $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

Stivt legeme som roterer om z-akse:
Sylinderkoordinater (r, θ, z) hensiktsmessig



Vinkler måles i radianer:

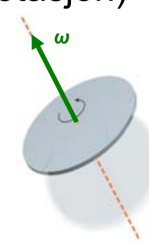
$\theta = s/r$ dvs. $s = r\theta$



Vinkelhastighet:

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$

Viktige størrelser (rotasjon)

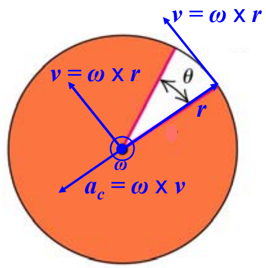


- Vinkelpos. $\theta = s/r$
- Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = v/r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{\omega}$ langs akseretning
- Periode T = tid/omdr = $1/f$
- Frekvens $f = 1/T$
- Vinkelfrekvens = vinkelhastighet = $\omega = 2\pi f$
- Vinkelaksel. $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}^2t$
- Banefart $v = |v| = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \omega r$
  - Vektorstørrelse: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
- Baneaksel. $a_t = \alpha\, r$
- Sentr.aksel. $a_c = v^2/r = \omega^2 r$
  - Vektorstørrelse: $\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$
  - Total aksel = $\vec{a} = -a_c \hat{r} + a_t \hat{\theta}$

Vektorer:

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

$\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$



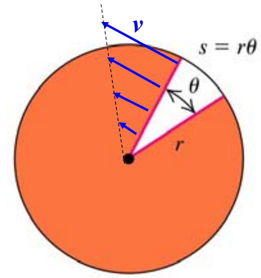
Lik for hele legemet:

Vinkelhastighet $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$

Vinkelaksel. $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$

Øker med radien r :

Banefart $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = \omega\, r$



Tang.aksel. $a_t = \alpha\, r$

Sentr.aksel. $a_c = \omega^2\, r$

- Translasjon: $E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2$

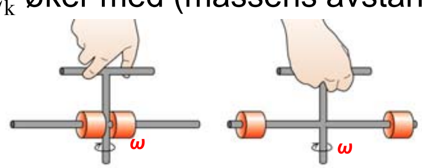
Massens plassering ingen betydning for E_k

Samme $\boldsymbol{v}$, samme E_k

- Rotasjon: $E_k = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2$

der $I = \int r^2\, \mathrm{d}m$

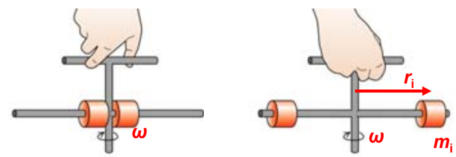
E_k øker med (massens avstand)^2 fra aksen



Samme $\boldsymbol{\omega}$, men ulik E_k

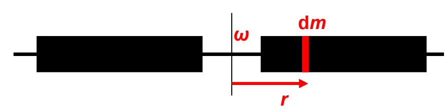
$E_k = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2$

$I = \Sigma\, r_i^2 m_i$



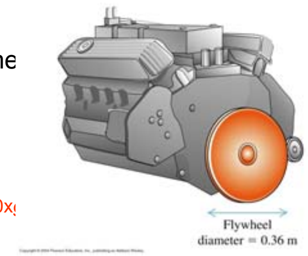
Her må vi integrere:

$I = \int r^2\, \mathrm{d}m$



Rotasjonshjul som energilager

- Stålskive 10 cm tykk, 1,0 m diame
  $I = ½ MR^2$ = 77 kg m^2
  Problem:
  Tung! (600 kg) Deformeres!
  I periferien er:
  Banefart v=ωr=1000 m/s
  Sentripetalaksel $\omega^2 r$ = 220000x



- Energi ved 20000 RPM (omdr. per min):
  $E_k = ½ I \omega^2$ = 170 MJ
- Forbrenningsenergi i bensintank på 40 liter,
  ved utnyttelse 33%: ca 530 MJ

Brukes i motorkjøretøy:
KERS = Kinetic Energy Recovery System:
en.wikipedia.org/wiki/KERS
Ett eksempel: R=12 cm M=5,0 kg f= 64 500 rpm E = 400 kJ

KERS i sykler:
www.sciencefriday.com/video/08/12/2011/boost-your-bike.html

Med KERS kan trolleybusser i Zürch også kjøre uten strøm:

Kap. 9+10. Rotasjon av stive legemer

Vi har sett på:

- Vinkelhastighet $\omega = d\theta/dt$, vinkelakselerasjon $\alpha = d\omega/dt$
- Banehastighet $v = r\,\omega$
- Sentripetalaks. $a_c = -r\,\omega^2 = -\omega\, v = -v^2/r$
- Baneakselerasjon $a_t = r \cdot \alpha$
- Rotasjonsenergi $E_k = ½ I \omega^2$
- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i = \int r^2\, dm$ (om en gitt akse)
  - Ring om sentrum: $I = M R^2$
  - Skive om sentrum: $I = ½ M R^2$
  - Lang, tynn stav om midtpunkt: $I = (1/12) M L^2$
  - (Alle disse gjennom massefellespunktet = cm)

Vektorer: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
$\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

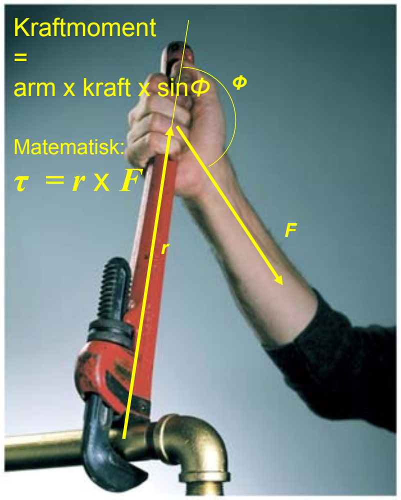
- Steiners sats (parallellakseteoremet):
  Treghetsmoment om annen parallell akse i avstand d:
  $I = I_0 + M\, d^2$
  dvs. I_0 (akse gjennom cm) er alltid **minst** mulige treg.moment

http://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_axes_rule

Kap. 9+10 Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- (N2-rot) stive legemer: $\boldsymbol{\tau} = I\, d\boldsymbol{\omega}/dt$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\mathbf{L}$
- (N2-rot) alle legemer: $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$
- Stive legemer: $\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\, d\boldsymbol{\omega}/dt$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…



$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

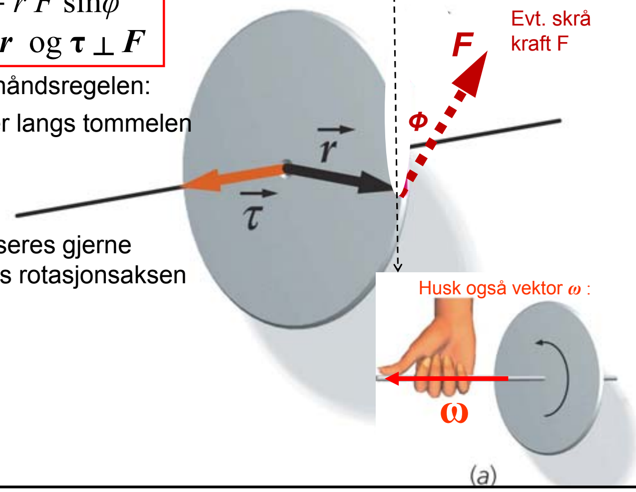
$|\boldsymbol{\tau}| = r\, F \sin\varphi$

$\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{F}$

Høyrehåndsregelen:

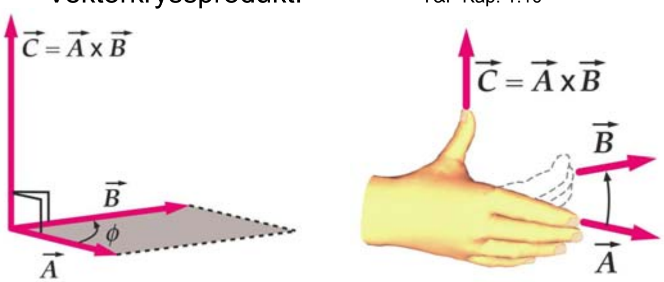
τ peker langs tommelen

τ plasseres gjerne langs rotasjonsaksen



Vektorkryssprodukt:

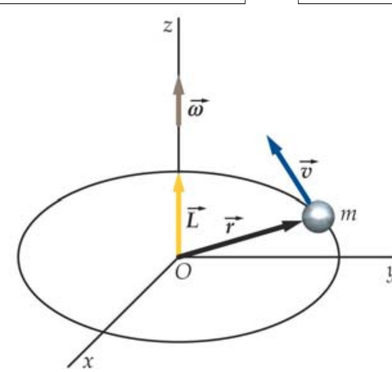
Y&F Kap. 1.10



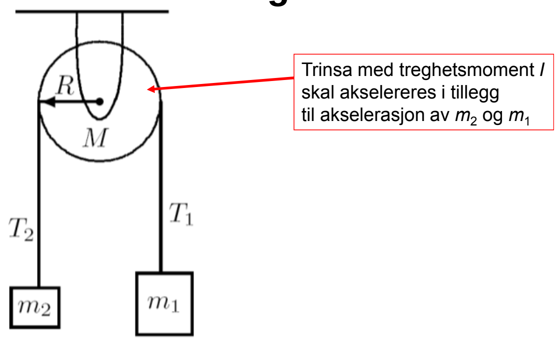
Bruker sjelden komponentform:

$$\vec{A}\times\vec{B} = [A_x, A_y, A_z]\times[B_x, B_y, B_z] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Translasjon:	Rotasjon:
$\boldsymbol{F} = m\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m\, \boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\tau} = I\ \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = I\, \boldsymbol{\alpha}$



Liknende eksempel: Atwoods (fall)maskin **Øving 5**



Kap. 9+10 Rotasjon av stive legemer

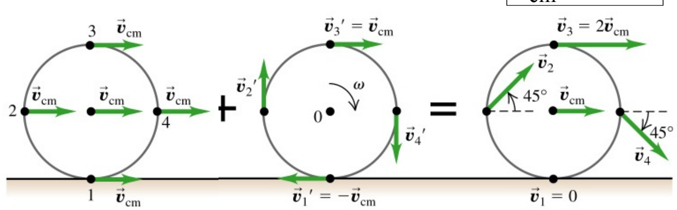
Vi skal se på:

- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$
- (N2-rot) stive legemer: $\boldsymbol{\tau} = I \,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- (N2-rot) alle legemer: $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

Rulling (uten å glippe) YF 10.3, LL 6.7

Translasjon + rotasjon = rulling

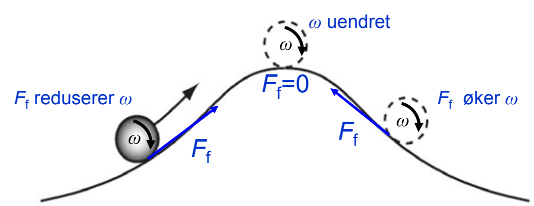
v ω $\boxed{v_{cm} = \omega\, r}$



$\frac{1}{2}\, m\, v^2 \quad + \quad \frac{1}{2}\, I\omega^2 \quad = \frac{1}{2}\, m\, v^2\,(1+c)$

Test

Ei kule triller oppover en bakke, passerer toppen og triller så nedover en bakke på motsatt side. Skissér hvilken retning friksjonen virker fra underlaget på kula, på vei opp, på toppen og på vei ned. Begrunn svaret. Vi antar at vi har rein rulling under hele bevegelsen.



Ytre kraft (mg sinα) endrer v
F_f gir moment til rotasjonen

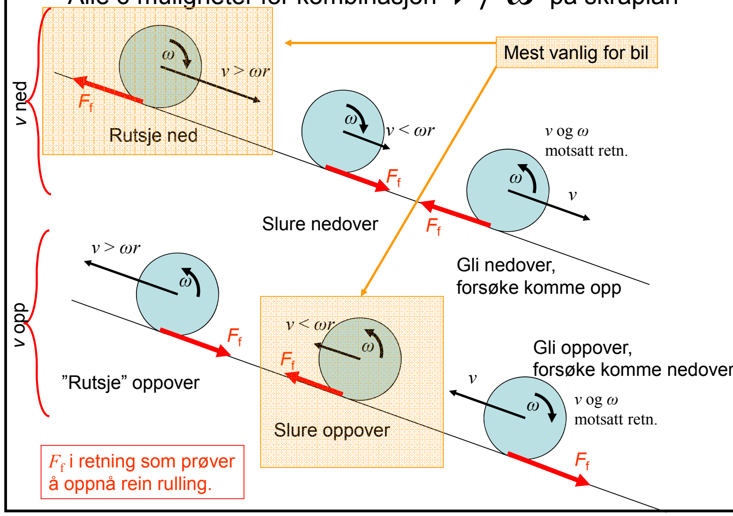
Hvilken ruller fortest:
Massiv kule
massiv sylinder, eller
hul sylinder ?
(Y & F, Ex. 10.5)

$E_k = \frac{1}{2}\, m\, v^2\, (1+c)$ = lik alle
Størst v for den med minst c
i tregh.momentet $I = c\, mr^2$

1. **Vannfylt flaske**
2. **Kule**
3. **Massiv sylinder**
4. **Hul sylinder = ring**

Uavhengig av størrelsen
(når rulleradius = legemets radius)

Alle 6 muligheter for kombinasjon $v \neq \omega$ på skråplan



Rulle på flatt underlag

Rulle

F_f =0 hvis konst v

hvis:

v **øker** => F_f mot venstre
for å øke ω

v **minker** => F_f mot høyre
for å redusere ω

Hvis ytre kraft F
årsak til endring i v

ω **øker** => F_f mot høyre
for å øke v (akselererer)

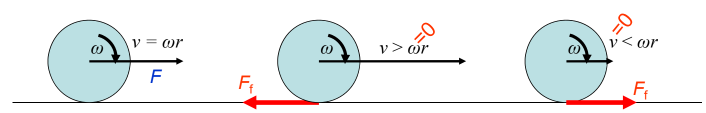
ω **minker** => F_f mot venstre
for å minke v (bremser)

Hvis bilmotor/hjulrotasjon
årsak til endring i v

(mer avansert)

Rulle / skli / slure på flatt underlag

Rulle Skli Slure



F_f =0 hvis konst v

F_f reduserer v (og øker ω)

F_f øker v (og redus. ω)

Finne retning for F_f:

1. F_f i retning som prøver
å oppnå rein rulling.

eller

2. Sett minste verdi lik null.

Oppsummering: Rulling

- Rein rulling:
- $v = \omega r$; $a = \alpha r$
  (dvs. translasjonshastighet = banefart til periferien)
- $E_k = ½\, mv^2 + ½\, I\omega^2 = ½\, m\, v^2\, (1+c)$
  - med $I = c\, mr^2$ og $\omega = v/r$
- Statisk friksjon $F_f \leq \mu_s F_N$ gir vinkelakselerasjon: $F_f\, r = I\alpha$.
- Ved rein rulling ser vi bort fra energitap (ingen rullemotstand).

- Spinne/skli/rutsje:
- $v \neq \omega\, r$. Kinematisk friksjon $F_f = \mu_k F_N$ i retning som prøver å oppnå rein rulling.
- Kinematisk friksjon gjør et friksjonsarbeid som endrer kinetisk energi

Treghetsmoment (om en gitt akse):

$$I = \Sigma\, r_i^2\, m_i \;\longrightarrow \int r^2\, dm$$

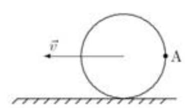
- Alle I_0 om massesentrum (cm):
- Ring om sentrum: $I_0 = M R^2$
- Ring om diameter: $I_0 = ½\, M R^2$
- Sylinder eller skive om sentrum: $I_0 = ½\, M R^2$
- Kule om diameter: $I_0 = (2/5)\, M R^2$
- Kuleskall om diameter: $I_0 = (2/3)\, M R^2$
  Rullende legemer: $I_0 = c\, MR^2$ (c=1, ½, 2/5 etc.)
- Lang, tynn stav om midtpunkt: $I_0 = (1/12)\, M L^2$
- Rektangulær plate om midtpunkt: $I_0 = (1/12)\, M (a^2 + b^2)$

- Om annen parallell akse i avstand d (Steiners sats):
  $I = I_0 + M d^2$

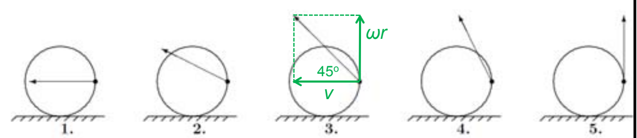
- Se også Table 9.2 i Young & Freedman.

Test

d. Et hjul med radius R ruller på flatt underlag mot venstre med hastighet v. Hvilken av figurene representerer riktig hastighetsvektor for et punkt A på hjulet?



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



Periferihastighet ωr
= rullehastighet v

Eksamensstatistikk:
A) 4
B) 9
C) 67 Riktig
D) 6
E) 83
blank 1
Tot 170

Oppsummering: Rulling

- **Rein rulling:**
- $v = \omega r$; $a = \alpha r$
  (dvs. translasjonshastighet = banefart til periferien)
- $E_k = ½\, mv^2 + ½\, I\omega^2 = ½\, m\, v^2\, (1+c)$
  - med $I = c\, mr^2$ og $\omega = v/r$
- **Statisk** friksjon $F_f \leq \mu_s F_N$ vesentlig for rulling og gir vinkelakselerasjon α: $F_f\, r = I\alpha$

- **Spinne/skli/rutsje:**
- $v \neq \omega\, r$. **Kinetisk** friksjon $F_f = \mu_k F_N$ i retning som prøver å oppnå rein rulling
- Kinetisk friksjon gjør et friksjonsarbeid som endrer kinetisk energi

- Rein rulling: ser vi bort fra energitap (ingen rullemotstand).
- Slure/skli : friksjonsarbeidet er vesentlig.

Kap. 9+10
Rotasjon av stive legemer

Vi skal se på:
- Vinkelhastighet, vinkelakselerasjon (rep)
- Sentripetalakselerasjon, baneakselerasjon (rep)
- Rotasjonsenergi E_k
- Treghetsmoment I
- Kraftmoment $\boldsymbol{\tau}$ N2-rotasjon: $\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Rulling
- Spinn (dreieimpuls): $\boldsymbol{L}$
- Spinnsatsen (N2-rotasjon): $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$
- Stive legemer: $\boldsymbol{L} = I\,\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t$
- Eksempler: gyroskop, m.m.m…

Denne uka

Spinn
(angular momentum)
Y&F 10.5-7
L&L 5.5, 5.9, 6

1 Spinn punktlegemer

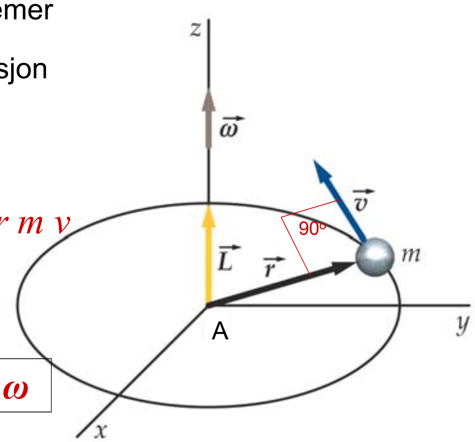
1.1 Spinn ved rotasjon

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r}$ => $|\boldsymbol{L}| = r\,m\,v$

$\boldsymbol{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$

$$\boxed{\boldsymbol{L} = mr^2\,\boldsymbol{\omega} = I\,\boldsymbol{\omega}}$$



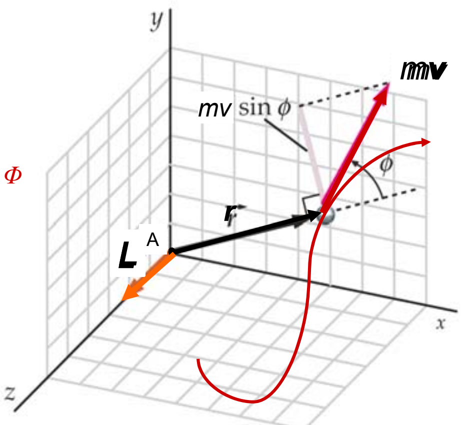
1 Spinn punktlegemer

1.2 Spinn ved vilkårlig bevegelse

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v}$ *ikke* $\perp$ $\boldsymbol{r}$

=> $|\boldsymbol{L}| = r\,m\,v \sin\Phi$

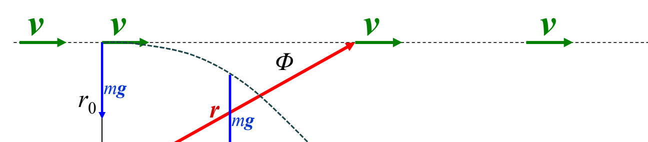


1 Spinn punktlegemer

1.3 Spinn ved rettlinjet bevegelse

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v}$$

$$|\boldsymbol{L}| = r\,m\,v \sin\Phi = r_0\, mv$$



Hvis $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ er $\boldsymbol{v} = \text{konst}$ => $\boldsymbol{L}$=konst. $= mvr_0$

Hvis f.eks. $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$ er $\tau \neq \boldsymbol{0}$ => $\boldsymbol{L}$ endres

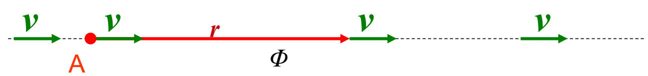
$\boldsymbol{L}$ avhengig av valgt origo A (r_0 og $\boldsymbol{r}$ avhengig av A)

1 Spinn punktlegemer

1.3 Spinn ved rettlinjet bevegelse

Med partikkelbanen gjennom A (origo), er $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{v}$ og:

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$



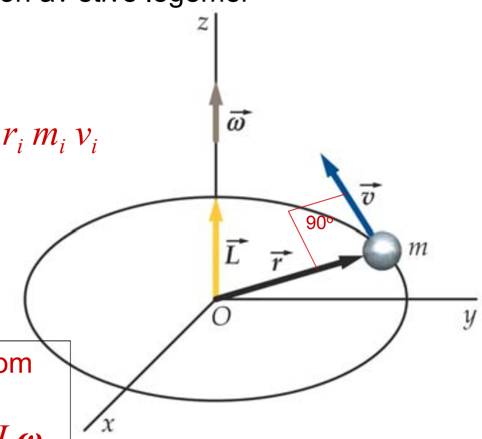
2 Spinn ved rotasjon av stive legemer

$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i\, \boldsymbol{v}_i$

$\boldsymbol{v}_i \perp \boldsymbol{r}$ => $|\boldsymbol{L}_i| = r_i\, m_i\, v_i$

$\boldsymbol{L}_i = m_i r_i^2\, \boldsymbol{\omega}$

alle $\boldsymbol{L}_i \parallel \boldsymbol{\omega}$



Stivt legeme, rot. om symmetriakse:

$\boldsymbol{L} = \Sigma m_i r_i^2\, \boldsymbol{\omega} = I\, \boldsymbol{\omega}$

Rotasjon av stive legemer

- Treghetsmoment $I = \Sigma\, r_i^2\, m_i$ (om en gitt akse)
- Rotasjonsenergi $E_k = ½\, \Sigma\, m_i\, v_i^2 = ½\, I\, \omega^2$
- Kraftmoment: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
- Spinn (dreieimpuls) $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$
- Spinnsatsen (N2-rot): $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t\, \boldsymbol{L}$
- Ingen ytre moment (N1-rot): $\boldsymbol{L}$ = konst.

stive legemer:

$\boldsymbol{L} = I\, \boldsymbol{\omega}$

$\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}/\mathrm{d}t\, \boldsymbol{\omega}$ (N2-rot)

Translasjon:	**Rotasjon:**
Bevegelsesmengde (linear momentum): $\boldsymbol{p} = m\, \boldsymbol{v}$	Spinn (angular momentum): $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\, \boldsymbol{v}$ $\boldsymbol{L} = I\, \boldsymbol{\omega}$ Stivt legeme
N2-trans: $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ "Stivt" legeme (konst. m): $\boldsymbol{F} = m\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = m\, \boldsymbol{a}$	N2-rot (spinnsatsen): $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t$ Stivt legeme (konst. I): $\boldsymbol{\tau} = I\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{d}t = I\, \boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{F} = 0$ => $\boldsymbol{p}$ = konstant (N1) "stivt" legeme: $\boldsymbol{v}$ = konst	$\boldsymbol{\tau} = 0$ => $\boldsymbol{L}$ = konstant (N1-rot) stivt legeme: $\boldsymbol{\omega}$ = konst