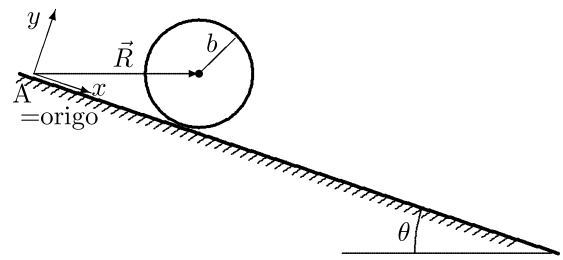
TFY4115 Fysikk (MTEL/MTTK/MTNANO)
Øving 7

Veiledning: Man 13. okt. og ons 15. okt.
Innlevering: Torsdag 16. okt. kl. 12:00

Gruppeinndelingen finner du på emnets nettside.
Lever øvinger i bokser utenfor R1.

Oppgave 1. Bruk av totalt spinn

Figuren viser ei kule med masse m og radius b som ruller nedover et skråplan med helning θ. Vi har i forelesningene funnet akselerasjon a og friksjonskrafta F_f for kula ved å bruke Newton 2 langs skråplanet og spinnsatsen om *akse gjennom kulas massesenter*. Vi skal nå alternativt finne a ved å velge referansepunkt A (aksen for moment) på skråplanet ovenfor kula. I forelesningseksempel med slurende/rullende bowlingkule ble det på samme måte brukt referansepunktet i et punkt på bakken. Fordelen er da at vi kan bestemme a uten å vite friksjonskrafta F_f.



Vi legger inn et koordinatsystem xy som vist i figuren med x parallell med skråplanet og z-aksen opp av papirplanet. Spinnet om A blir

$$\vec{L} \;=\; m\vec{R}\times\vec{V} + I_0\,\vec{\omega}.$$

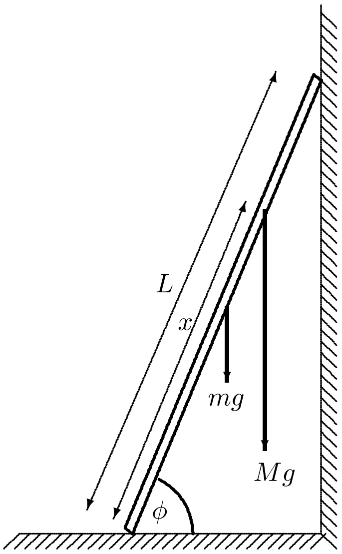
Her er $\vec{R}$ massesenterets posisjon, $\vec{V}$ massesenterets hastighet, $I_0 = (2/5)mb^2$ kulas treghetsmoment om akse gjennom massesenteret og $\vec{\omega}$ er den roterende kulas vinkelhastighet.

a. Tegn inn alle krefter på kula og finn *netto*-kraft $\vec{F}$ og *netto*-kraftmoment $\vec{\tau}$ på kula. Uttrykk og retning.

b. Hva er retningen for $\vec{R}\times\vec{V}$ og for $\vec{\omega}$? Finn spinnet $\vec{L}$, uttrykt med bl.a. V.

c. Bruk alt dette til å bestemme akselerasjonen a til kulas massesenter nedover langs skråplanet.

Oppgave 2. Statikk.



Figuren viser en stige satt opp mot en vegg. Stigen har massen m og lengden L, med tyngdepunktet midt på. Stigen settes opp med en vinkel ϕ relativt horisontalplanet. Den bolde maler, med masse M, klatrer opp i stigen og står på et trinn i avstand x fra stigens nedre ende. I realiteten vil både friksjon mellom stige og underlag, og mellom stige og vegg, bidra til å stabilisere situasjonen. Vi skal her neglisjere hjelpen fra friksjon mot veggen, og regne som om det eneste som hindrer kollaps, er den statiske friksjonskoeffisienten μ_s mellom stige og gulv. Her er det likevel mye som kan variere: μ_s, x og ϕ. Hva må til for at stigen blir stående i ro?

a. Skriv ned likevektsbetingelsene for stige pluss maler, og vis at minimumskravet for stabil likevekt er

$$\tan\phi \;\geq\; \frac{\frac{x}{L}M + \frac{1}{2}m}{\mu_s(M+m)}.$$

b. La $m = 12{,}0\,\text{kg}$ og $M = 80\,\text{kg}$. Hva er minimumsvinkelen som tillater maleren å gå helt til topps i stigen (som vi definerer er $x/L = 9/10$), når μ_s har henholdsvis verdiene 0,50, 0,40 og 0,30?

Oppgave 3. Enkelt og grunnleggende om svingefunksjonen.

Et legeme svinger med utslag $x(t) = x_0\cdot\cos(\omega t + \theta)$ der $x_0 = 0{,}50\,\text{m}$, $\omega = \dfrac{3\pi}{4}\,\text{s}^{-1}$, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, og t er tida i sekunder.

a. Finn perioden T og frekvensen f for oscillatoren (tallverdier).

b. Finn uttrykk for hastigheten $v(t) = \dot{x}(t)$ og akselerasjonen $a(t) = \ddot{x}(t)$. (Ikke sett inn tallverdier)

c. Tegn en graf med den relative tida t/T langs horisontal akse og posisjonen $x(t)$ langs vertikal akse. Marker også langs den horisontale aksen verdier for ωt. (Dvs. to skalaer på samme aksen).
Tegn også tilsvarende grafer for $v(t)$ og $a(t)$, tegn alle tre grafene under hverandre.

d. Hva er den maksimale hastigheten v_max og ved hvilke tider finner vi denne?

Oppgave 4. Svingetid som funksjon av amplituden. Numerisk løsning.

Pendelbaserte stueur må svinge med konstant amplitude for å gå riktig. Eller, hvor viktig er egentlig dette? For å svare må vi finne den analytiske løsningen av svingelikningen (1) og sammenlikne med den lineariserte likn. (2). Likn. (1) gir at svingetida er avhengig av amplituden θ_0, men hvor mye? Istedenfor å kaste oss ut i det vanskelige arbeidet å løse likning (1) analytisk, velger vi en numerisk løsning. Matlab-koden er oppgitt.

Likningen for en tyngdependel med dempning er som følger:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \tag{1}$$

med $\omega_0^2 = g/\ell$ der ℓ er pendelens lengde. Hvis vi lineariserer $\sin\theta \approx \theta$ for små vinkler, får vi en standard dempet svingelikning

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \tag{2}$$

Den lineariserte likning har en kjent analytisk løsning $\theta(t) = \theta_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \phi)$ der $\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ og fasevinkelen ϕ i dette tilfellet er uinteressant.

Vi kan løse differensiallikningene (1) og (2) numerisk ved bruk av *Verlet-integrasjon*. Denne metoden består ganske enkelt i å bytte ut $\dot{\theta}$ og $\ddot{\theta}$ med endelig-differensialuttrykkene:[1]

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad\rightarrow\quad \frac{\theta(t_{n+1}) - \theta(t_{n-1})}{2\Delta t} \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} \quad\rightarrow\quad \frac{\theta(t_{n+1}) - 2\theta(t_n) + \theta(t_{n-1})}{\Delta t^2}\,. \tag{4}$$

Bytter vi i differensiallikningene (1) og (2) $\dot{\theta}$ og $\ddot{\theta}$ ut med uttrykkene (3) og (4) og løser med hensyn på $\theta(t_{n+1})$, vil vi få

$$\text{Lineær likn. (2)} \quad\Rightarrow\quad \theta_{\text{lin}}(t_{n+1}) = \frac{2 - \omega_0^2\Delta t^2}{1+\gamma\Delta t}\,\theta(t_n) - \frac{1-\gamma\Delta t}{1+\gamma\Delta t}\,\theta(t_{n-1}) \tag{5}$$

$$\text{Ulineær likn. (1)} \quad\Rightarrow\quad \theta(t_{n+1}) = \frac{2}{1+\gamma\Delta t}\,\theta(t_n) - \frac{1-\gamma\Delta t}{1+\gamma\Delta t}\,\theta(t_{n-1}) - \frac{\omega_0^2\Delta t^2}{1+\gamma\Delta t}\,\sin\theta(t_n). \tag{6}$$

a. Matlab-scriptet `tfy4115_Ov5_1.m` som du kan lesse ned fra øvinggsiden på nett, implementerer Verlet-algoritmene over. Bruk programmet til å sammenligne løsninger av den ikke-lineære pendelligningen (6) med løsninger av den lineariserte ligningen (5). Startverdier er gitt øverst i scriptet og programmet gir kurver og utskrift av svingetida T til skjermen. Velg ulike amplitudeverdier (angitt i grader) og kjør programmet gjentagne ganger med forskjellige tidssteg Δt.

b. Er det ok å linearisere når amplituden $\theta_0 = 5°$? Svar på dette med å beregne hvor mye klokka sinker i et døgn dersom den er kalibrert til å gå med svært liten amplitude (f.eks. 1°), men svinger med 5°?

c. Analytisk løsning av likn. (1) gir følgende uttrykk for perioden ved rekkeutvikling:

$$T(\theta_0) \;=\; T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right], \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Sammenlikn resultater fra Matlab-scriptet med dette uttrykket f.eks. for $\theta_0 = 5°$ og $\theta_0 = 15°$.

Ekstraoppgave: **d.** Har du lyst kan du utfordre Matlab-programmet ved å simulere for θ_0 lik eller nærme 180°. Du må nok da øke tidsintervallet vi integrerer over. Her er kun den ikke-linære løsningen interessant, og den forutsetter en "stiv" snor for å avbilde virkeligheten. Kommentarer?

Utvalgte fasitsvar:
1d: $-\hat{\mathbf{z}}\,\frac{7}{5}mbV$; 1e: $\frac{5}{7}\,g\sin\theta$; 2b: $60°, 65°$ og $71°$; 3d) 1,18 m/s

---

[1] Jamnfør definisjonen av deriverte. I uttrykket for $\dot{\theta}$ er det to tidssteg mellom $\theta(t_{n+1})$ og $\theta(t_{n-1})$, derfor $2\,\Delta t$ i nevneren. Siste uttrykk framkommer f.eks. fra

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t} \quad\rightarrow\quad \frac{\dot{\theta}(t_{n+\frac{1}{2}}) - \dot{\theta}(t_{n-\frac{1}{2}})}{\Delta t} = \frac{\frac{\theta(t_{n+1})-\theta(t_n)}{\Delta t} - \frac{\theta(t_n)-\theta(t_{n-1})}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\theta(t_{n+1}) - 2\theta(t_n) + \theta(t_{n-1})}{\Delta t^2}\,.$$