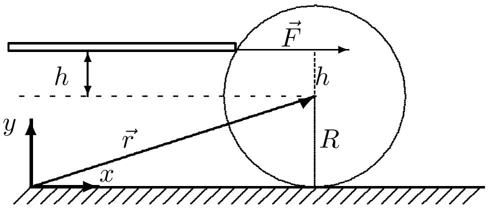
TFY4115 Fysikk (MTELSYS/MTTK/MTNANO)

Eksempel: Biljardkule (slag og bevegelse)

Problemet er gitt som øvingsoppgave tidligere, men ikke plass i år. Gis derfor som et eksempel, i form av Oppgave, Tips og Løsningsforslag. Ikke de enkleste oppgaver, men lærerikt. Prøv selv før du ser på løsningsforslaget!

Oppgave.

Biljardspill (f.eks. snooker) er en krevende sport, og fordrer at spilleren har et godt praktisk grep på kulers tyngdepunktsbevegelse og rotasjon, friksjonskreftenes rolle, samt resultatet av elastiske støt mellom kuler. Her skal vi ta for oss en "enkel" problemstilling som likevel er en god illustrasjon av den relativt subtile mekanikk som kommer til anvendelse på biljardbordet. Oppgaven hører ikke til de enkleste, men den er lærerik, enten du spiller et biljardspill eller ikke.



Situasjonen vi skal se på er som følger: Biljardkula med masse M og radius R får et kraftig, men kortvarig støt av en horisontal kø. Vi legger et koordinatsystem xyz med origo på bordflata og xy-flata lik vertikalplanet gjennom kulas massesenter.

Køen er retta i x-retning og treffer kula (som ligger i ro) midt på kula, dvs. i xy-planet med en kraft F i x-retning. Treffpunktet er i høyden h over massesenteret (eller under, hvis $h < 0$), se figuren.

Støtet er så kraftig og er over på så kort tid at vi under selve støtet kan neglisjere innvirkningen av friksjonskrafta fra biljardbordet. *Etter* støtet derimot, vil friksjonskrafta F_f spille en viktig rolle for kulas fortsatte bevegelse.

a. Det kortvarige støtet gir en kraftimpuls $F\Delta t$, som resulterer i at massesenteret får initialhastigheten V_0. Det kortvarige støtet gir også en kortvarig dreiemomentimpuls $\tau\Delta t$, som resulterer i at kula starter opp med vinkelhastigheten ω_0. Vis fra impulsloven for henholdsvis $F\Delta t$ og $\tau\Delta t$ at sammenhengen mellom V_0 og ω_0 er

$$V_0 = \frac{2R^2}{5h} \cdot \omega_0.$$

Hva er betingelsen for at vi allerede fra første øyeblikk får rein rulling?

b. For de fleste verdier av støtparameteren h vil biljardkula i begynnelsen gli på bordet samtidig som den roterer. Hvilken retning vil friksjonskrafta F_f, fra bordet på kula, ha i denne fasen, avhengig av h's verdi?

c. Etter at støtet er overstått, vil kulas totale spinn (dreieimpuls) $\vec{L} = M\,\vec{r} \times \vec{V} + I_0\vec{\omega}$ være bevart, *dersom* vi velger referansepunktet i et punkt langs skjæringslinja mellom bordets overflate og vertikalplanet gjennom kulas massesenter (dvs. langs x-aksen i figuren). Enkleste valg er i origo, se figuren. Hvorfor får vi spinnbevarelse med dette valget? Vi antar at bare z-komponenten til $\vec{L}$ er aktuell her, ingen rotasjon om annen akse.

d. Pga. friksjonen mellom bord og kule vil kulas bevegelse etter en viss tid gå over til rein rulling. Bruk konservering av L_z til å finne massesenterhastigheten V_r etter at rein rulling har inntrådt. Skisser kurva $V_\mathrm{r}(h)$ for $-R < h < R$. (Hvis betingelsen for rein rulling er oppfylt fra første øyeblikk, skrumper denne "viss tid" inn til null, og $V_\mathrm{r} = V_0$; ha dette som en kontroll av svaret.)

e. Vis at tida det tar fra slaget til biljardkula ruller, t_r, er gitt som

$$t_\mathrm{r} = \frac{2V_0}{7\mu_\mathrm{k} g} \cdot \left|1 - \frac{5h}{2R}\right|$$

der μ_k er den kinetiske friksjonskoeffisienten mellom bord og kule.
TIPS: Bruk svaret i **b.** og en konstant-akselerasjonslikning.

Er du enda ikke mett på regning kan du også finne:

f. energitapet ΔE,

g. forskjøvet strekning ℓ langs underlaget i tida t_r, dvs. fra støtet til rein rulling oppnås.

Tips.

a. Impulsloven for translasjon sier at impulsen (kraft x tid) er lik endring i bevegelsesmengde, og tilsvarende for rotasjon (utledes raskt fra Newton 2):

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$$
$$\vec{\tau}\Delta t = \Delta\vec{L}$$

Eliminerer $F\Delta t$ mellom de to likningene, og finn svaret.

b. Friksjonskrafta virker slik at bevegelsen går mot rein rulling. Du finner defor retningen på friksjonen ved å vurdere om om rotasjonen er for rask eller for langsom - eller motsatt: om translasjonen er for langsom eller rask.

c. Bowlingeksemplet i forelesning er veldig likt. Også Øving 7, oppg. 1.

d. Svaret er:

$$V_{\mathrm{r}} = \frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0.$$

Spesialtilfellet med rein rulling umiddelbart ($h = 2R/5$) gir rett svar.

e. Translasjonshastigheten endres pga. en konstant akselererende (eller retarderende) kraft. Finn akselerasjonen og sett inn i en konstant-akselerasjonslikning for å bestemme t_{r}. Du kjenner jo start- og slutthastigheten, eller i alle fall sammenhengen mellom disse, fra **d.**

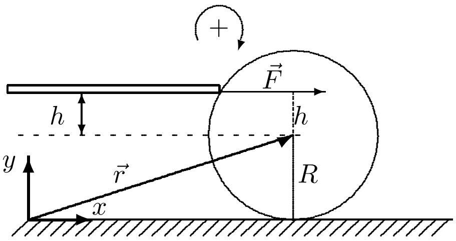
Den akselererende/retarderende krafta vil du skjønne er friksjonskrafta, og du må dele opp problemet for de to ulike retninger for denne, og løsningen kan sammenfattes til én løsning som gitt, med absoluttverdi. Sjekk også her at spesialtilfellet som gir rein rulling, stemmer.

f. Total kinetisk energi er $E_{\mathrm{k,trans}} + E_{\mathrm{k,rot}}$. Ved rein rulling er $\omega_{\mathrm{r}} = V_{\mathrm{r}}/R$ og ved start er ω_0 funnet i **a.** Finn uttrykk for $E_0 = E(\text{før})$ og $E_{\mathrm{r}} = E(\text{etter})$. Det kan også være informativt å finne forholdet E_{r}/E_0.

g. Forskjøvet lengde kan finnes fra gjennomsnittsfart (translasjon) og den funne tida t_{r} ovenfor: $\ell = \langle V\rangle t_{\mathrm{r}}$.

Svar: $$\Delta E = E(\text{etter}) - E(\text{før}) = -\frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{2}{7}\left(1 - \frac{5h}{2R}\right)^2, \qquad \ell = \frac{2V_0^2}{49\mu_{\mathrm{k}}g}\left(6 + \frac{5h}{2R}\right) \cdot \left|1 - \frac{5h}{2R}\right|.$$

Løsningsforslag.



a. Det kortvarige, kraftige støtet gir ifølge impulsloven følgende bidrag til massesenterets hastighet og til vinkelhastigheten om massesenteret:

$$F\Delta t = M\Delta V = MV_0$$
$$\tau\Delta t = Fh\Delta t = I_0\Delta\omega = I_0\omega_0.$$

Positiv translasjon i x-retning og positiv rotasjon med klokka, vist i figuren. Vi har som oppgitt neglisjert friksjonskraftas bidrag i det korte tidsrommet Δt, som er rimelig unntatt for slag som er veldig svake.

Vi eliminerer den ukjente størrelsen $F\Delta t$ mellom de to likningene, og får derved en relasjon mellom V_0 og ω_0,

$$MhV_0 = I_0\omega_0 \quad\Rightarrow\quad V_0 = \frac{2R^2}{5h}\,\omega_0 \quad\text{eller}\quad \underline{\omega_0 = \frac{5h}{2R^2}\,V_0}\,. \tag{1}$$

Rein rulling forutsetter at $V_0 = R\omega_0$, og denne betingelsen er bare oppfylt når $\underline{h/R = +2/5}$.

b. Dersom $h > 2R/5$, vil $\omega_0 > V_0/R$, dvs. kula ruller for fort i forhold til rein rulling. Det innebærer at undersiden av kula glir mot venstre på underlaget, og friksjonskrafta vil derfor være retta mot høyre. Retningen kan også konkluderes fra at friksjonskrafta forsøker å oppnå perfekt rulling ved å redusere rotasjonshastigheten og øke translasjonshastigheten.
Dersom $h < 2R/5$ er situasjonen den motsatte, friksjonskrafta virker mot venstre og gir kula rotasjonsakselerasjon og translasjonsretardasjon. For $h < 0$ vil $\omega_0 < 0$, dvs. kula ruller "gal" vei, friksjonen fortsatt mot venstre (forsøker å få kula til å rulle rett vei).

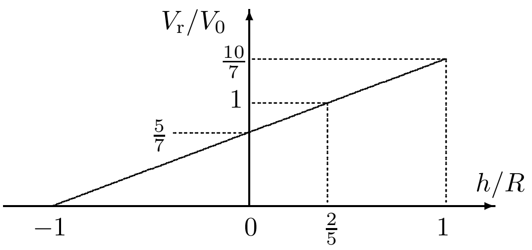
c. Velger vi referansepunktet (hvor som helst) langs x-aksen vil $\vec{r}_{\rm f} \times \vec{F}_{\rm f} = 0$, der $\vec{r}_{\rm f}$ er $\vec{F}_{\rm f}$'s angrepspunkt, som er i kontaktpunktet mellom kule og bord. De to vektorene er parallelle. Ingen andre krefter gir dreiemoment om origo etter at støtet er avsluttet, og totalspinnet relativt origo må derfor være bevart. (Luftmotstanden, som vi har neglisjert, gir selvsagt et ørlite dreiemoment som ødelegger for den perfekte spinnbevarelse.)

d. Totalspinnet blir

$$\begin{aligned}
L_z &= L = M[\vec{r}\times\vec{V}]_z + I_0\omega = MRV + I_0\omega \\
\text{start:}\quad L_0 &= MRV_0 + (2/5)MR^2\,\omega_0 \overset{(1)}{=} MRV_0(1+h/R) \\
\text{ved rein rulling:}\quad L_{\rm r} &= MRV_{\rm r} + (2/5)MR^2\cdot V_{\rm r}/R = (7/5)MRV_{\rm r}.
\end{aligned}$$

Da spinnet er bevart må $L_0 = L_{\rm r}$, som gir hastigheten når rein rulling er oppnådd:

$$\underline{V_{\rm r} = \frac{5}{7}\left(1+\frac{h}{R}\right)V_0.} \tag{2}$$



Når $h/R = +\frac{2}{5}$ finner vi $V_{\rm r} = V_0$, som vi burde. Når $h/R > \frac{2}{5}$ vil altså massesenterhastigheten *øke* på vei til den endelige rullebevegelsen, ellers vil den avta. Merk at $V_{\rm r} \geq 0$ *alltid*, uansett hvor lavt på kula køen treffer, dvs. der er ikke mulig å få kula til å trille tilbake etter rein rulling er oppnådd. For $h = -R$ stopper kula.

e. Når translasjonshastigheten endres fra V_0 til $V_{\rm r}$ i en tid $t_{\rm r}$ (som skal bestemmes) er det ene og alene friksjonskrafta $F_{\rm f} = \mu_{\rm k}Mg$ som gir denne akselerasjonen. Akselerasjonen $a = F_{\rm f}/M = \mu_{\rm k}g$ er konstant og vi kan bruke konstant-akselerasjonslikningen $V_{\rm r} = V_0 + at_{\rm r}$ til å bestemme $t_{\rm r}$. Som funnet i b. peker $F_{\rm f}$ mot høyre og a er positiv når $h/R > 2/5$, mens $F_{\rm f}$ mot venstre og a negativ når $h/R < 2/5$. Vi tar først for oss tilfellet positiv a:

$$\begin{aligned}
V_{\rm r} &= V_0 + at_{\rm r} \qquad \text{og} \quad V_{\rm r} = \frac{5}{7}\left(1+\frac{h}{R}\right)V_0 \\
\Rightarrow\ t_{\rm r} &= \frac{1}{a}\left(V_{\rm r}-V_0\right) = \frac{1}{\mu_{\rm k}g}\left(-\frac{2}{7}+\frac{5}{7}\frac{h}{R}\right)V_0 = V_0\,\frac{2}{7\mu_{\rm k}g}\left(\frac{5}{2}\frac{h}{R}-1\right) \qquad \text{når } h/R > 2/5.
\end{aligned}$$

Når $h/R < 2/5$ blir $a = -\mu_{\rm k}g$ og fortegnet snus:

$$t_{\rm r} = V_0\,\frac{2}{7\mu_{\rm k}g}\left(1-\frac{5}{2}\frac{h}{R}\right) \qquad \text{når } h/R < 2/5.$$

Om ønsket kan vi sammenfatte til én likning:

$$\underline{t_\mathrm{r} = \frac{2V_0}{7\mu_\mathrm{k} g}\left|1 - \frac{5}{2}\frac{h}{R}\right|} \quad \text{for alle } h/R \in \langle -1, 1\rangle\,.$$

Verdien er 0 *bare* for $h/R = 2/5$, i tråd med det vi visste fra før.

f. Energiberegninger: Først startenergi uttrykt ved translasjonsenergien $\frac{1}{2}MV_0^2$:

$$E_0 = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2\left(1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{R^2}\right).$$

Dernest energi for den rullende kula med $\omega_\mathrm{r} = V_\mathrm{r}/R$:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2}MV_\mathrm{r}^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_\mathrm{r}^2 = \frac{1}{2}MV_\mathrm{r}^2 \cdot \frac{5}{7} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2.$$

Og vi kan uttrykke energitapet:

$$\Delta E = E_\mathrm{r} - E_0 = \frac{1}{2}MV_0^2\left[\frac{5}{7}\left(1 + 2\frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2}\right) - \left(1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{R^2}\right)\right] = \underline{-\frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{5}{2}\frac{h}{R}\right)^2}$$

etter litt algebra. Vi kan også uttrykke relativ energi etter rulling er oppnådd:

$$\epsilon = \frac{E_\mathrm{r}}{E_0} = \frac{\frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}{1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{R^2}}\,.$$

En kontroll: Ved slag som gir rein rulling ($h/R = 2/5$) er $\epsilon = 1$, dvs. ikke energitap. Ved $h = -R$ er $\epsilon = 0$, dvs. 100% energitap. Dessuten: ved $h = +R$ er $\epsilon = 40/49$ og ved $h = 0$ er $\epsilon = 5/7$.

g. Det er konstant akselerasjon slik at lengden kula sklir langs underlaget før rein rulling oppnås finnes fra gjennomsnittsfarten $\langle V\rangle$:

$$\ell = \langle V\rangle\, t_\mathrm{r} = \frac{1}{2}(V_\mathrm{r} + V_0)\, t_\mathrm{r} = \underline{\frac{2V_0^2}{49\mu_\mathrm{k} g}\left(6 + \frac{5h}{2R}\right)\left|1 - \frac{5h}{2R}\right|}.$$

der vi har brukt uttrykk for V_r og t_r ovenfra. Kontroll: $\ell = 0$ når $h/R = 2/5$.

Vi har lært at det kreves relativt omfattende regning for å bestemme t_r eller ℓ, mens V_r i pkt. **d** (og derved, med litt ekstra faktoriseringsstrev, ΔE) faller nesten rett ut ved bruk av spinnbevarelse.

Det ville også vært interessant å analysere bevegelsen etter et slag som treffer til høyre eller venstre for xy-planet. Dette vil gi sidelengs spinn ($\vec{\omega}$ vertikal), og kan gi en ikke-lineær bane(?) For curlingspillere er vertikal $\vec{\omega}$ viktig for curlingsteinens videre bevegelse, men er utfordrende å regne på.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 2. okt. 15.