

Eksempel: Skli og rulle bowlingkule.

Vi antar ei bowlingkule “settes” på golvet med translasjonsfart v_0 , dvs. uten rotasjon og uten at den dumper/hopper. Den vil først skli (rutsje), men friksjonen vil etterhvert gi kula rein rulling. Skal løse følgende problem:

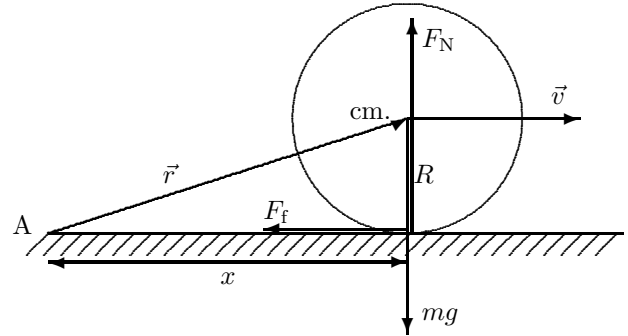
- Hva er v når den ruller?
- Finn akselerasjonen, a , når den sklir.
- Hvor langt, l , sklir den før den oppnår rein rulling?
- Finn vinkelakselerasjonen $a = \dot{\omega}$ når den sklir.
- Hvor lang tid tar det før den oppnår rein rulling?

I første omgang velger vi et fast punkt A på bakken som referansepunkt for spinn og kraftmoment. Totalspinnet L er banespinn pluss egenspin som beskrevet i “Notat om banespinn og egenspin”:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} + I_0\vec{\omega}.$$

Positiv rotasjonsretning med klokka.

Med $x = 0$ der kula treffer bakken og $x = l$ der kula oppnår rein rulling, har vi, når kulas masse er m og kulas radius R :



$$L(x=0) = Rmv_0 + 0 \quad (1)$$

$$L(x=l) = Rmv + I_0\omega = Rmv + \frac{2}{5}mR^2v/R = \frac{7}{5}Rmv \quad (2)$$

idet rein rulling ved $x = l$ gir $\omega = v/R$.

Kraftmoment om A er null:

$$\tau = mgx - F_Nx + 0 = 0$$

idet tyngden mg og normalkrafta har effektiv arm x og friksjonskrafta virker langs planet (arm \parallel kraft) og derfor null moment. Med totalt null kraftmoment er spinnet bevart, og vi får:

$$Rmv_0 = \frac{7}{5}Rmv \Rightarrow v = \frac{5}{7}v_0. \quad (3)$$

- b) Når kula sklir er eneste kraft horisontalt: $F_f = \mu_k F_N = \mu_k mg$, og $ma = -F_f = -\mu_k mg$ (N2) gir
- $$a = -\mu_k g.$$

- c) Konstant a -likning gir bestemmelse av lengden l med v_0 ved start og v ved slutt:

$$v^2 - v_0^2 = 2al \Rightarrow \left(\frac{5}{7}v_0\right)^2 - v_0^2 = -2\mu_k gl \Rightarrow l = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu_k g}.$$

ALTERNATIVT kan vi bruke kulas massesenter (B = cm) som referansepunkt. Spinn og kraftmoment om B er

$$LB = I_0\omega \quad \text{og} \quad \tau_B = F_f R. \quad (4)$$

$\dot{L}_B = \tau_B$ (N2-rot) gir dermed

$$I_0\dot{\omega} = F_f R.$$

Herfra kan vi finne:

- d) Vinkelakselerasjon $\dot{\omega}$ under skliing:

$$\dot{\omega} = \frac{F_f R}{I_0} = \frac{\mu_k mg R}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{\mu_k g}{\frac{2}{5}R} = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{R} = -\frac{5}{2}a.$$

Merk at selvfølgelig er $\dot{\omega} \neq a/R$ (og motsatt fortegn!), mens altså ved rein rulling er $\dot{\omega} = a/R$.

- e) Dersom vi skal finne ω under skliing må vi bruke følgende konstant-akselerasjonslikning for ω , med $\omega_0 = 0$:

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}t = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{R} t.$$

Herfra kan vi også finne hvor lang tid det tar før rein rulling ($v = \omega R$) er oppnådd:

$$\frac{v}{R} \equiv \omega = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{R} t \Rightarrow t = \frac{2}{5} \frac{v}{R} \frac{R}{\mu_k g} = \frac{2}{5} \frac{v_0}{\mu_k g} = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu_k g}.$$